Tema 1
PROBLEMAS DE DECISIÓN

En su dimensión más básica los problemas de decisión pueden plantearse como: la elección por parte de un centro decisor (un individuo o grupo de individuos) de "lo mejor" entre "lo posible". Las dificultades surgen a la hora de definir "lo mejor" y "lo posible" en un determinado contexto decisional.

Estos problemas planteados en el contexto general de la programación matemática obedecen a la estructura particular siguiente: optimizar (maximizar o minimizar) una función (:= función objetivo) en el conjunto solución de un número finito de ecuaciones e inecuaciones (:= restricciones del problema). Con este planteamiento "lo posible" viene determinado por las restricciones del problema (información exclusivamente técnica que modeliza la existencia de recursos limitados, entendiendo el término recurso en un sentido amplio); mientras que, "lo mejor" viene determinado por las preferencias que señala el decisor[1] al optimizar la función objetivo.

La función objetivo, que puede ser escalar (problema monobjetivo) o vectorial (problema con varios objetivos), y las restricciones son funciones matemáticas de las variables de decisión y de parámetros. Las variables de decisión son aspectos controlables, por parte del centro decisor, del problema; mientras que los parámetros son cantidades dadas que no se pueden controlar. Se supone siempre que las variables de decisión son no negativas.

Sujetos del proceso de decisión

Decisor o centro decisor: individuo o grupo de individuos, interesados en el problema a resolver, que directamente o indirectamente proporciona/n su solución.

Analista: individuos o grupos de individuos que analizan el problema a resolver y ayudan al decisor o centro decisor a elegir una solución conveniente del mismo.

---

[1] Aunque el término decisor se utiliza habitualmente en singular, no está restringido necesariamente a identificar un único individuo, sino que puede entenderse también como un grupo de individuos que actúan colegiadamente.

Formulación general de un problema de decisión

Determinadas las variables de decisión y construidas las expresiones matemáticas que definen las restricciones y los objetivos, la formulación general de un problema de decisión con *m* objetivos, *n* variables de decisión y *k* restricciones es:

$$\text{Optimizar} \quad f(x): [f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)]^T; \quad x: (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$$

s.a.:

$$r_i(x) \leq 0; \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

$$x \geq 0$$

Es interesante señalar que, aunque es posible formular los problemas de decisión multiobjetivo discretos utilizando la formulación correspondiente a problemas continuos, no es lo usual.

Tratando con problemas discretos, por verificarse que las alternativas factibles se conocen explícitamente y que su número es finito, generalmente no muy elevado, es preferible presentar "directamente" estas alternativas al decisor para que las evalúe utilizando como referencia los objetivos del problema.

Acerca de las restricciones

Las restricciones en general pueden venir dadas por ecuaciones (signo =) e inecuaciones débiles (con signos ≤ o ≥).

No obstante a esto, pueden escribirse siempre como inecuaciones débiles expresadas todas ellas con un mismo signo; para ello, basta tener en cuenta que:

$$r_i(x) \geq b_i \quad \Leftrightarrow \quad -r_i(x) \leq -b_i$$

$$r_i(x) = b_i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r_i(x) \geq b_i \\ r_i(x) \leq b_i \end{cases}$$

Además, caso de tener restricciones de igualdad, es posible también simplificar el problema de optimización reduciendo el número de variables. Para ello, si alguna restricción viene dada por una igualdad (ecuación) se despeja en ella una de sus variables en función de las restantes, se elimina la restricción y el valor de esta variable se sustituye en las restantes restricciones y en la función objetivo.

Soluciones del problema

Cualquier colección de valores que se asignen a las variables, representa una solución del problema. Una solución que satisface todas las restricciones recibe el nombre de solución factible y el conjunto de todas ellas, se denomina conjunto factible en el espacio de las variables de decisión F, que supuesto no vacío[2], puede ser continuo (existen infinitas soluciones factibles) o discreto (existe un número finito de soluciones factibles).

En los problemas con varios objetivos es de utilidad considerar, no solo el conjunto factible F en el espacio de las variables de decisión, sino también el conjunto transformado de F mediante las ecuaciones que definen los objetivos F´ = f (F) (:= conjunto factible en el espacio de los objetivos). Si $x \in R^n$ y $f \in R^m$; es decir, consideramos *n* variables de decisión y *m* objetivos, el transformado del conjunto n-dimensional F será un conjunto m-dimensional F´.

Problemas lineales

Cuando la función objetivo y las restricciones son funciones lineales de las variables de decisión, el problema de decisión se dice lineal (PL).

En estos problemas el conjunto factible F (también F´) es *siempre* un conjunto cerrado convexo (:= poliedro), usualmente acotado, y para su resolución es posible centrar la atención únicamente en la consideración de los puntos extremos (esquina) del conjunto convexo que identifica su conjunto factible[3]. Tener esto en cuenta es importante, debido a que el número de puntos extremos es pequeño (un número finito) comparado con las infinitas soluciones factibles de un problema continuo.

[2] Si el conjunto factible F está vacío, el problema se dice infactible.

[3] Las imágenes de los puntos extremos del poliedro F (conjunto factible en el espacio de las variables de decisión), serán puntos extremos del poliedro F´ (conjunto factible en el espacio de los objetivos). La transformación de unos puntos extremos en los otros viene dada por las ecuaciones de las funciones objetivo.

Obtención de un punto extremo (esquina) del conjunto factible F de un PL con *n* variables de decisión y *k* restricciones

Sobre las hipótesis establecidas, un punto extremo de F es un punto de R^n que se puede obtener convirtiendo *n* de las *n* + *m* restricciones del problema (incluidas las condiciones de no negatividad de las variables) en ecuaciones y resolviendo el sistema lineal de orden *n* resultante. Teniendo esto en cuenta, una cota superior del número de puntos extremos del conjunto factibles F para el PL considerado es:

$$\binom{n+k}{n} = \frac{(n+k)!}{k!\,n!}$$

Si n = 2, un punto extremo es la intersección de dos rectas; si n = 3, es la intersección de tres planos y para cualquier *n*, la intersección de *n* hiperplanos.

Resolución de los problemas de decisión

Para resolver un problema de decisión, es preciso encontrar una solución factible que optimice (maximice o minimice) el valor de la función objetivo[4].

En general, para la resolución de estos problemas, es recomendable utilizar el programa LINGO (versión LINDO caso de resolver problemas lineales).

Cualquier información sobre este programa, así como los manuales de uso y una versión educacional gratuita del mismo, pueden encontrarse en la siguiente página web http://www.lingo.com

1. PARADIGMA DE DECISIÓN TRADICIONAL: PROBLEMAS DE DECISIÓN MONOBJETIVO

La formulación general, en el contexto de la programación matemática, de un problema de decisión monobjetivo con *n* variables de decisión y *k* restricciones es:

[4] En los problemas con varios objetivos siempre se puede suponer, asignando adecuadamente las funciones que los representan, que la función objetivo vectorial se optimiza "globalmente" en un sentido maximizador o minimizador. Esto es debido a verificarse que: Min f_i (x) = Max [– f_i (x)], i = 1, 2,…, m.

Optimizar (Max o Min) f (x); $x: (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in Rn$

s.a.:

$r_i(x) \leq 0; \quad i = 1, 2, \ldots, k$

$x \geq 0$

Sin pérdida de generalidad, se puede suponer siempre que la optimización de la función objetivo (escalar) se realiza siempre en un sentido maximizador. Esto es debido a verificarse que:

$$\text{Min } f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \text{Max } [-f(x)]$$

Estos problemas se ajustan a un esquema que puede resumirse en la forma siguiente:

En primer lugar, se establece el conjunto de soluciones factibles F del problema de decisión considerado.

A continuación, haciendo uso de la función (escalar) objetivo o función de criterio se asigna a cada solución factible un número que representa el grado de deseabilidad que esta solución tiene para el centro decisor y se ordenan las soluciones factibles con una relación de orden que por verificar las propiedades: Reflexiva, Antisimétrica, Transitiva y Conexa o Total, cumple ser una relación de orden total que permite ordenar todas las soluciones factibles del problema, según el valor que asignan a la función objetivo.

Posteriormente, aplicando técnicas matemáticas más o menos sofisticadas, se determina una solución factible (:= solución óptima)[5] que asigne a la función objetivo su mejor valor (:= valor óptimo).

La solución óptima está situada siempre en la frontera del conjunto factible F.

En los problemas lineales, si la solución óptima es única corresponde siempre a un punto extremo (esquina) del conjunto convexo que identifica al poliedro factible.

Cuando la solución óptima corresponde a más de un punto, se dice que existen óptimos alternativos y se verifica que, todos ellos asignan el mismo valor a la función objetivo, debido a esto el valor óptimo de la función objetivo es único.

El propósito de los problemas monobjetivo es encontrar una solución óptima.

Teniendo en cuenta las consideraciones realizadas, la determinación de una solución óptima puede hacerse en los PL considerando, únicamente, el con-

---

[5] Una solución factible $x^* \in F$ se dice óptima, si no existe una solución $x \in F$ tal que $f(x) > f(x^*)$.

junto de los puntos extremos (:= conjunto extremal) del poliedro factible F; debido a esto, tratando con problemas lineales, podremos centrar nuestra atención únicamente en la consideración de estos puntos.

Obtención de la solución óptima de un PL monobjetivo

Puede utilizarse uno de los procedimientos siguientes[6]:

1. Método de los Puntos Esquina: calcula todos los puntos extremos o esquina del conjunto F y evalúa en los mismos la función objetivo[7]. El punto (o puntos, caso de tener óptimos alternativos) que optimice (maximice o minimice) la función objetivo, será la solución óptima.
2. Método Simplex: calcula la solución factible correspondiente a un punto extremo cualquiera de F y partiendo de este punto extremo se mueve, sucesivamente, a puntos extremos adyacentes que mejoren el valor de la función objetivo, deteniéndose cuando el valor de la misma no pueda ser mejorado.
3. Método Gráfico (aplicable solo a problemas con dos o a lo sumo tres variables de decisión): utilizando un sistema de referencia cartesiano rectangular de ejes las variables de decisión del problema obtienen la representación gráfica del conjunto factible F, superpone sobre este conjunto la gráfica de la función objetivo igualada a una constante y a continuación, desplaza la misma en el sentido creciente de la constante (problema de maximización) o decreciente (problema de minimización). El último punto (o puntos caso de óptimos alternativos) en el que la gráfica de la función objetivo en su desplazamiento toque al conjunto factible, proporciona la solución (o soluciones) óptima(s) del problema.

[6] Todos los procedimientos de resolución de un PL monobjetivo se basan en el hecho de que la solución óptima del problema se obtiene en uno o más (en el caso de óptimos alternativos) puntos extremos (esquina) de F.

[7] En los problemas reales hay demasiados puntos extremos para que este procedimiento sea recomendable desde un punto de vista computacional.

2. CRÍTICA AL PARADIGMA DECISIONAL TRADICIONAL (O MONOBJETIVO)

El paradigma decisional anterior, aunque posee una gran solidez desde el punto de vista lógico (es decir, su coherencia interna es perfecta), presenta importantes debilidades que lo desvían considerablemente de los procesos reales de toma de decisiones.

En concreto, en casi todos los casos de la vida ordinaria los centros decisores no desean ordenar las soluciones posibles (factibles) con arreglo a un único criterio (objetivo), sino que desean efectuar esta tarea con arreglo a diferentes criterios que reflejen sus particulares preferencias[8].

Otro problema que subyace en el paradigma de decisión tradicional está en considerar *siempre* a las restricciones que definen el conjunto factible como ataduras rígidas que no pueden violarse. Esta hipótesis es poco realista, debido a que en muchos contextos decisionales aceptar una cierta relajación en el cumplimiento de las restricciones, no afecta seriamente al marco real en el que se define el problema de decisión, pudiéndose alcanzar gracias a esta relajación, mejoras significativas en los resultados alcanzados por algunos criterios.

Ejemplo

Si decidimos cambiar de coche, el conjunto de soluciones factibles (que define "lo posible") serán todos los modelos de coches que caen dentro de nuestro presupuesto y para elegir un coche concreto nos interesará evaluar cada uno de estos modelos posibles, no en base a un solo criterio sino a varios criterios, usualmente en conflicto, tales como: potencia, consumo, confort, número de plazas, etc.

Ampliando algo el presupuesto, podemos mejorar alguno(s) de los criterios.

3. PROBLEMAS DE DECISIÓN MULTIOBJETIVO

Los problemas monobjetivo no deben ser considerados problemas de decisión propiamente dichos, sino *problemas de medición y búsqueda*. Esto es debido a que en los mismos, el decisor utilizando diversas técnicas matemáticas, más

8 Solo en contadas ocasiones de la vida real, alguno de los criterios (u objetivos) se convierte en fundamental y determina por sí mismo la elección. Por ejemplo, elegir el coche más caro por prestigio.

o menos sofisticadas, se limita a buscar dentro del conjunto de soluciones posibles (:= conjunto factible o conjunto elección) una solución (:= solución óptima) que asigne el mejor valor (máximo o mínimo según el caso) al único objetivo del problema.

Los problemas reales de decisión surgen en problemas multiobjetivo con objetivos en “conflicto”.

En estos problemas, no será posible obtener una solución factible que asigne a todos los objetivos su mejor valor, sino que el decisor aplicando distintas metodologías, deberá decidir la “mejor solución” a escoger dentro del conjunto factible.

El motivo de esto radica en lo siguiente:

En problemas monobjetivo es posible definir en el conjunto factible *F* la relación binaria de orden total[9], siguiente:

$$\text{“solución } x^1 \text{ mejor o igual que solución } x^2\text{”} \qquad \left(\Leftrightarrow \begin{cases} f(x^1) \geq f(x^2) & \max \\ f(x^1) \leq f(x^2) & \max \end{cases} \right)$$

que permite comparar todas las soluciones factibles según el valor que asignan a la función objetivo y obtener una solución óptima del problema; mientras que, en problemas multiobjetivo, con objetivos en conflicto, solo es posible definir una relación binaria de orden parcial estricto[10] (:= orden Pareto) que no permite comparar *todas* las soluciones factibles y obtener una solución en la que todos los objetivos alcancen su mejor valor, sino tan solo segregar del conjunto factible un subconjunto propio de soluciones (:= conjunto eficiente).

Las soluciones eficientes, por obtenerse definiendo en el conjunto factible una relación de orden parcial, no son comparables[11].

Las consideraciones anteriores ponen de manifiesto, como ya hemos comentado, que en la vida real los centros decisores no toman sus decisiones en base a un único objetivo sino a varios y que, además, puede interesar relajar el cumplimiento de ciertas restricciones que definen el conjunto factible. Por ello, los investigadores de diferentes áreas, principalmente del campo de

---

9 Verifica las propiedades Reflexiva, Antisimétrica, Transitiva y Conexa o Total.

10 Verifica las propiedades Irreflexiva y Transitiva.

11 La comparación de soluciones en base a un objetivo puede contradecir la comparación basada en otros objetivos y por ello, en general, no será una solución factible del problema la que asigne “simultáneamente” el mejor valor a todos los objetivos.

la Investigación de Operaciones (IO), han desarrollado en los últimos 30 años el paradigma de decisión, alternativo al tradicional, siguiente: "Paradigma de Decisión Multicriterio (MCDM)" que permite enmarcar con precisión los problemas reales de la toma de decisiones.