Parte I

La toma de decisiones

1 Toma de decisiones

1. Decisiones en ambiente de incertidumbre
2. La entropía
3. El valor del dinero en el tiempo
4. Los árboles de decisión y el valor esperado de la información perfecta
5. La programación lineal. El programa dual
6. El método PERT y los gráficos de Gantt
7. La ponderación de factores

1. Decisiones en ambiente de incertidumbre

Problema 1.1.1 El criterio de Laplace

Laply, S.A., es una empresa dedicada a la fabricación y venta de aparatos electrodomésticos, que se encuentra estudiando el lanzamiento de su nueva marca de refrigerador Frío para competir con la empresa Waldy, S.A., que elabora otra marca dirigida al mismo segmento del mercado. El beneficio anual de Laply, S.A., depende de su estrategia de marketing y de la que siga Waldy, S.A. Aquélla puede seleccionar la estrategia *A*, *B* o *C*, y ésta puede elegir entre las estrategias *X*, *Y* y *Z*. Laply, S.A., ignora las probabilidades de que Waldy, S.A., elija la estrategia *X*, la *Y* o la *Z*, por lo cual se encuentra en situación de incretidumbre para decidir, pero conoce los beneficios anuales que se derivarían para ella de cada una de sus estrategias en función de cuál fuera la que eligiera su competidora, y son los que, en millones de unidades monetarias (u.m.), se recogen en la tabla 1.1 (matriz de decisión).

TABLA 1.1

		ESTRATEGIA DE WALDY, S.A. (EN MILLONES DE U.M.)		
		X	***Y***	***Z***
ESTRATEGIA DE LAPLY, S.A.	***A***	200	300	340
	B	260	320	320
	C	272	280	300

La interpretación de esta tabla es muy simple. Así, si Laply, S.A., elige la estrategia *B*, ganará 260 millones de u.m. si Waldy, S.A., selecciona la *X*, 320 millones de u.m. si ésta elige la *Y* y 320 millones de u.m. si se decide por la *Z*.

Se desea saber cuál es la estrategia preferible para Laply, S.A., siguiendo el criterio de Laplace.

Resolución

Tradicionalmente se distinguen tres situaciones o ambientes de decisión:

— El ambiente de certeza, en el cual se conoce el resultado de cada una de las estrategias de decisión con total seguridad.

— El ambiente de riesgo, en el que se conocen los posibles resultados de cada estrategia, o alternativa, con sus respectivas probabilidades, en cuyo caso son aplicables técnicas como la de la esperanza matemática de cada estrategia, y es posible el cálculo, también, de su varianza asociada.

— El ambiente de incertidumbre, que puede ser estructurada o no estructurada. En la incertidumbre estructurada se conocen los resultados posibles de cada estrategia, aunque no sus probabilidades.

Así, en el presente caso, Laply, S.A., sabe que de la estrategia *A* pueden derivarse los resultados 200, 300 o 340 millones de u.m., aunque no conoce las probabilidades que tiene cada uno de ellos. Sabe también, aunque no puede asignar las probabilidades, que, si sigue la estrategia *B*, puede obtener los resultados 260 y 320 millones de u.m. y que, si se decide por la estrategia *C*, los resultados pueden ser 272, 280 o 300. En situación de incertidumbre no estructurada no se conocen ni siquiera los resultados posibles de cada estrategia.

El criterio de Laplace, como los que son objeto de estudio en los problemas siguientes, es aplicable en situación de incertidumbre estructurada. Este criterio parte de la consideración de que, ante la ignorancia de las probabilidades que tienen los distintos resultados posibles, lo más adecuado es asignarles la misma probabilidad a todos ellos, lo cual conduce, a su vez, a tomar, como resultado esperado, la media aritmética de dichos resultados posibles. Así, si sigue la estrategia *A*, suponiendo, como lo hace el criterio de Laplace, que existe la misma probabilidad de que Laply, S.A., siga la estrategia *X*, la *Y* o la *Z* (1/3), el resultado esperado será la media aritmética de los tres resultados posibles; es decir:

$$R_A = 200(1/3) + 300(1/3) + 340(1/3) = \frac{200 + 300 + 340}{3} = 280 \text{ millones de u.m.}$$

Del mismo modo, en cuanto a la estrategia *B* que resulta ser la preferible, se obtiene:

$$R_B = \frac{260 + 320 + 320}{3} = 300 \text{ millones de u.m.}$$

Y, en relación a la C:

$$R_C = \frac{272 + 280 + 300}{3} = 284 \text{ millones de u.m.}$$

Problema 1.1.2 El criterio de Wald

¿Cuál sería la mejor decisión de la empresa Laply, S.A., del problema anterior, siguiendo el criterio de Wald?

Resolución

El criterio de Wald es el que adopta aquella persona pesimista que supone que lo que ocurrirá es lo peor que pueda sucederle y elige aquella estrategia a la que le corresponde el mejor entre los peores resultados posibles. Así, en este caso, si se elige la alternativa A, el menor resultado es el correspondiente a la estrategia X de Waldy, S.A. (200 millones de u.m.). Del mismo modo, si se elige la alternativa B y ocurre lo peor que puede suceder (que Laply, S.A., elija la estrategia X), se obtendrá un beneficio anual de 260 millones de u.m., y si se elige la opción C, el mínimo resultado anual es de 272 millones de u.m.. Con un criterio prudente, basado en garantizarse un beneficio tan elevado como sea posible (criterio *maximin* o de Wald), Laply, S.A., elegiría la alternativa C, a la que le corresponde el máximo entre los mínimos, con lo cual puede tener la seguridad de que su beneficio anual no será inferior a 272 millones de u.m.

Problema 1.1.3 El criterio optimista

¿Cuál sería la mejor decisión de la empresa Laply, S.A., de los problemas anteriores, según el criterio optimista?

Resolución

El criterio optimista es el que sigue aquella persona que elige la alternativa a la que le corresponde el mejor resultado posible. En la tabla 1.2 se recogen los mayores beneficios que puede conseguir Laply, S.A., bajo cada una de sus alternativas de acción.

ESTRATEGIAS	MÁXIMO BENEFICIO
A	340
B	320
C	300

TABLA 1.2

Dado que el máximo beneficio posible es el correspondiente a la estrategia A, la mejor decisión según el criterio *maximax* es elegir esta alternativa.

Problema 1.1.4 El criterio de Hurwicz

¿Cuál sería la mejor decisión de la empresa Laply, S.A., de los problemas anteriores, según el criterio de optimismo parcial de Hurwicz para un coeficiente de optimismo del 60 por 100?

Resolución

El criterio de Hurwicz pondera, en cada estrategia, el mejor resultado con un coeficiente de optimismo, α, y el peor resultado con un coeficiente de pesimismo $(1 - \alpha)$. Los decisores más optimistas asignarán valores más elevados a α, de modo que, cuando α toma el máximo valor que puede alcanzar, es decir, la unidad (el 100 por 100), el criterio resultante es el *maximax*. El valor asignado a α será tanto más pequeño cuanto más pesimista sea el decisor, de modo que cuando este coeficiente adopta el mínimo valor que puede tomar, es decir, cuando $\alpha = 0$, el criterio resultante es el de Wald.

Los cálculos necesarios en el presente caso (α = 60 por 100 = 0,60) se efectúan en la tabla 1.3.

La estrategia preferible, según el criterio de optimismo parcial de Hurwicz, para un $\alpha = 0{,}60$, es la B, a la que le corresponde el mayor resultado de ponderar los beneficios correspondientes al mejor y al peor de los casos.

TABLA 1.3

Estrategias	Máximos (M_i)	Mínimos (m_i)	$H_i = aM_i + (1 - a)m_i =$ $= 0{,}6M_i + 0{,}4m_i$
A	340	200	284
B	320	260	296
C	300	272	288,8

Problema 1.1.5 El criterio de Savage

¿Cuál sería la mejor decisión de la empresa Laply, S.A., de los problemas anteriores, según el criterio del mínimo pesar de Savage?

Resolución

Si Laply, S.A., se decidiera por la alternativa A y Waldy, S.A. eligiera la estrategia X, aquélla ganaría 200 millones de u.m. y se arrepentiría de no haber elegido la alternativa C, a la que le hubiera correspondido un beneficio de 272 millones de u.m. Su «pesar» sería de $272 - 200 = 72$ millones. Si, por el contrario, hubiera elegido la alternativa *B*, su «pesar» sería sólo de 12 millones (272 − 260). Si la estrategia elegida por Waldy, S.A. fuera la *Y*, Laply, S.A. no tendría pesar alguno si hubiera elegido la estrategia *B*, pero sus pesares serían de 20 y 40 millones de u.m., respectivamente, si hubiera seleccionado las estrategias *A* y *C*. Del mismo modo se calculan los pesares asociados a la decisión *Z* de Waldy, S.A.; es decir, restando los términos de esa columna respecto al mayor de ellos. En la tabla 1.4 (matriz de pesares) se recogen los resultados obtenidos y el valor del mayor de los pesares asociados a cada estrategia.

TABLA 1.4

	X	*Y*	*Z*	Máximo pesar
A	72	20	0	72
B	12	0	20	20
C	0	40	40	40

Siguiendo el criterio de Savage, la decisión óptima es elegir la alternativa *B*, a la que le corresponde el menor entre los máximos pesares posibles. Con ello el decisor se asegura de que su pesar (es decir, lo que deja de ganar por no acertar) nunca superará los 20 millones de u.m.

Problema 1.1.6 Juego de suma nula

Si el beneficio anual que obtendrá Laply, S.A. con su nueva marca Frío coincide con la reducción de beneficios de la empresa Waldy, S.A., que, hasta ahora, era la única que operaba en este segmento del mercado, ¿cuál será la solución del juego de competencia suponiendo que el ganador sigue la estrategia maximin y que el perdedor sigue el criterio minimax?

Resolución

En los problemas anteriores se hacía abstracción del proceso decisional de Waldy, S.A. (*W*) y se planteaba aisladamente el problema de Laply, S.A. (*L*). Para *L*, las posibles decisiones de *W* son «estados de la naturaleza», o situaciones de las que depende el resultado de su decisión y en las que no puede incidir. Del mismo modo, para *W*, las alternativas de *L* son estados de la naturaleza.

Dado que lo que un jugador (*L*) gana lo pierde el otro (*W*), se trata de un juego de suma nula en el que el saldo neto, para el conjunto de los jugadores, vale cero.

En la tabla 1.5 se recoge la matriz de decisión junto con los mínimos resultados correspondientes a las estrategias de *L* y los máximos que se pueden derivar de las alternativas de *W*.

Con un criterio prudente, *W* puede actuar limitando su pérdida de beneficios máxima (criterio minimax) y seguir la estrategia *X*, con la que se asegura de que no tendrá una pérdida superior a 272 millones de u.m. Con el mismo criterio prudente, basado en garantizarse un beneficio anual tan elevado como sea posible (criterio maximin) *L* optaría por la estrategia *C*, con la que se aseguraría de que su beneficio no fuera inferior a 272 millones de u.m. Si los dos jugadores actúan de este modo, la solución del juego es que la empresa *L* gana, y la *W* pierde, 272 millones de u.m. de beneficio anual.

TABLA 1.5

		Estrategia de *W*			Mínimos
		X	*Y*	*Z*	
Estrategias de *L*	***A***	200	300	340	200
	B	260	320	320	260
	C	272	280	300	272
Máximos		272 Minimax	320	340	

Problema 1.1.7 Criterios de decisión en situación de incertidumbre

Plasted es una empresa dedicada a la fabricación de diversos plásticos que va a crear una nueva fábrica dedicada a la producción de un nuevo material que sustituye, con ventajas de peso y de resistencia a la corrosión, a varios metales empleados en la industria del automóvil. Las alternativas de decisión existentes son:

A) Construir una fábrica intensiva en mano de obra.
B) Construir una fábrica intensiva en equipos de producción y con escasa necesidad de mano de obra.
C) Construir una fábrica medianamente intensiva en mano de obra y en equipos de producción.

El criterio de decisión es minimizar los, costes de producción, y éstos dependen de la evolución de los costes de la mano de obra y de los de mantenimiento y reparación ($M + R$) de los delicados equipos de producción que son necesarios si no se utiliza intensivamente el factor trabajo. Existen, por consiguiente, cuatro situaciones, o estados de la naturaleza, posibles:

I: Mano de obra barata y costes de $M + R$ bajos.
II: Mano de obra barata y costes de $M + R$ elevados.
III: Mano de obra cara y costes de $M + R$ bajos.
IV: Mano de obra cara y costes de $M + R$ elevados.

Tras los diversos estudios realizados, se estima que los costes globales del proyecto en cuestión, según cual sea la alternativa elegida y el estado del mundo o de la naturaleza que se presente, son los de la tabla 1.6 (en millones de u.m.).

TABLA 1.6

		Estados de la naturaleza			
		I	II	III	IV
Estrategias	*A*	300	330	900	930
	B	270	1200	300	1230
	C	285	1650	315	1380

Se desea saber si existe alguna estrategia dominada y determinar las estrategias preferibles según los distintos criterios de decisión aplicables en situación de incertidumbre.

Resolución

Evidentemente, la alternativa *C* es una estrategia dominada que nunca debería ser seleccionada. Si el estado de la naturaleza fuera el I, la mejor alternativa sería la *B*, a la que le corresponde el menor de los costes. Si se diera la situación II, la mejor estrategia sería la *A*, y la *B* sería la preferible si se presentara el estado III. De forma semejante, la alternativa *A* es la preferible si la situación que se produce es la IV. Por consiguiente, la alternativa *C* no es preferible en ninguno de los casos (está dominada por la *B*) y ha de ser eliminada en el análisis, por lo cual la nueva matriz de decisión es la de la tabla 1.7.

TABLA 1.7

		Estados de la naturaleza			
		I	II	III	IV
Estrategias	*A*	300	330	900	930
	B	270	1200	300	1230

Entre estas dos alternativas, *A* y *B*, no existen relaciones de dominio.

En cuanto a la determinación de la alternativa óptima, teniendo siempre en cuenta que, en este caso, no se trata de maximizar los resultados, sino de minimizar los costes, los criterios aplicables son los siguientes:

a) Criterio de Laplace, o de igual verosimilitud. La alternativa óptima será aquella a la que le corresponda el menor coste medio ($\overline{C}_i$), siendo los costes medios de las dos estrategias (o costes esperados en situación de igual verosimilitud) los siguientes:

$$\overline{C}_A = \frac{300 + 330 + 900 + 930}{4} = 615 \text{ millones de u.m.}$$

$$\overline{C}_A = \frac{270 + 1200 + 300 + 1230}{4} = 750 \text{ millones de u.m.}$$

Por tanto, según el criterio de Laplace, la estrategia óptima es construir una fábrica intensiva en mano de obra (alternativa *A*).

b) Criterio optimista o, en este caso, *minimin*. En la tabla 1.8 se recogen, en millones de u.m., los costes mínimos bajo cada estrategia (así como los máximos, que serán útiles en la aplicación del criterio pesimista).

TABLA 1.8

		Mínimo coste (m_i)	Máximo coste (M_i)
Estrategias	***A***	300	930
	B	270	1230

Según el criterio optimista, la estrategia preferible es la de construir una fábrica intensiva en equipos de producción (*B*), a la que le corresponde el mínimo de los costes posibles.

c) Criterio pesimista o, en este caso, *minimax*. Según la tabla 1.8 anterior, la decisión óptima es construir una fábrica intensiva en mano de obra alternativa *A*), pues, con ello, se asegura que los costes no superarán los 930 millones de u.m.

d) Criterio de optimismo parcial de Hurwicz. Dado que el enunciado del problema no indica cuál es el coeficiente de optimismo, α, que ha de aplicarse al mejor de los resultados (es decir, al menor de los costes), habrá de calcularse para qué valores de α es preferible una u otra alternativa. Los coeficientes de optimismo para los cuales es preferible la primera estrategia que la segunda serán los valores de α para los cuales se cumple que:

$$H_A = 300\alpha + 930(1 - \alpha) < 270 + 1230(1 - \alpha) = H_B$$

En este caso, una estrategia, *i*, es tanto mejor cuanto menor sea el valor de H_i. Es decir, que *A* será preferible a *B* cuando:

$$930 - 630\alpha < 1230 - 960\alpha \rightarrow 330\alpha < 300 \rightarrow \alpha < 0{,}9091$$

La opción *A* es preferible a la *B* para coeficientes de optimismo inferiores al 90,91 por 100; es decir, para los comprendidos entre 0 y 0,9091. Para coeficientes de optimismo superiores a 0,9091 e inferiores o iguales al 100 por 100, es preferible la estrategia *B*. Ambas alternativas son indiferentes cuando $\alpha = 0{,}9091$.

Por otra parte, cuando $\alpha = 0$ (criterio pesimista), se obtiene:

$$H_A = 930$$

y

$$H_B = 1230$$

y cuando $\alpha = 1$ (criterio optimista):

$$H_A = 300$$

y

$$H_B = 270$$

Estós resultados se han sintetizado en la figura 1.1.

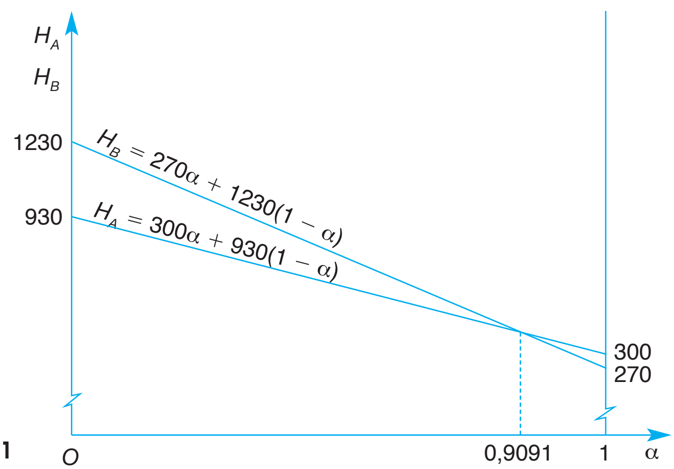

FIGURA 1.1

e) Criterio del mínimo pesar de Savage. Bajo cada estrategia y cada estado de la naturaleza, el pesar es la diferencia entre el coste que corresponde en cada caso y el mínimo correspondiente a ese estado. Así se ha formado la matriz de pesares de la tabla 1.9.

El máximo pesar de cada alternativa es, aquí, el máximo sobrecoste en el que se puede incurrir por no acertar en la decisión. El mínimo, entre los máximos pesares, corresponde a la decisión de construir la fábrica intensiva en mano de obra (A), que será la preferible bajo este criterio.

		Estados de la naturaleza				Máximo pesar
		I	II	III	IV	
Estrategias	***A***	30	0	600	0	600
	B	0	870	0	300	870

TABLA 1.9

Problema 1.1.8 Criterios de decisión en situación de incertidumbre

En la matriz de decisión de la tabla 1.10 se recogen los resultados asociados a cada una de las estrategias (E_1, E_2 y E_3) que puede seguir la empresa Ciuned, según cual sea el estado de la naturaleza (S_1, S_2 o S_3) que se presente:

		Estados de la naturaleza		
		S_1	S_2	S_3
Estrategias	E_1	200	220	280
	E_2	180	260	240
	E_3	220	240	232

TABLA 1.10

Se desea saber si hay alguna estrategia dominada y cuál es la alternativa preferible, según los diferentes criterios de decisión aplicables en situación de incertidumbre, si la empresa desea obtener un resultado tan elevado como sea posible.

Resolución

En la tabla 1.11 se señala la alternativa preferible bajo cada estado de la naturaleza.

Estado	Estrategia óptima
S_1	E_3
S_2	E_2
S_3	E_1

TABLA 1.11

No hay ninguna alternativa de decisión que no sea idónea en algún caso, por lo cual no existe ninguna estrategia dominada.

En cuanto a la determinación de la alternativa óptima, los criterios son los siguientes:

a) Criterio de Laplace. Denominando $\overline{R}_i$, al resultado medio derivado de la estrategia S_i, se obtiene:

$$\overline{R}_1 = \frac{200 + 220 + 280}{3} = 233{,}33$$

$$\overline{R}_2 = \frac{180 + 260 + 240}{3} = 226{,}67$$

$$\overline{R}_3 = \frac{220 + 240 + 232}{3} = 230{,}67$$

Dado que se trata de un caso de maximización, la estrategia óptima, siguiendo el criterio de Laplace, es la E_1.

b) Criterio optimista. La estrategia a la que le corresponde el máximo resultado posible (280) es la E_1. Ésta es, por tanto, la mejor alternativa según el criterio *maximax*.

c) Criterio pesimista o de Wald. Bajo la estrategia E_1 el mínimo resultado es 200 en tanto que 180 es el mínimo correspondiente a la alternativa E_2 y 220 el que corresponde a la E_3. Por consiguiente, el mayor de los mínimos se obtiene con la estrategia E_3, y ésta es la alternativa preferible según el criterio de Wald.

d) Criterio de Hurwicz. En la tabla 1.12 se recogen los resultados máximos y mínimos que pueden obtenerse bajo cada una de las alternativas de decisión y el valor de la H correspondiente a cada una de ellas según el valor del coeficiente de optimismo, α.

TABLA 1.12

Estrategia (E_i)	Máximo (M_i)	Mínimo (m_i)	$H_i = \alpha M_i + (1 - \alpha) m_i$
E_1	280	200	$\alpha 280 + (1 - \alpha)200$
E_2	260	180	$\alpha 260 + (1 - \alpha)180$
E_3	240	220	$\alpha 240 + (1 - \alpha)220$

Es decir:

$$H_1 = \alpha 280 + (1 - \alpha)200 = 80\alpha + 200$$

$$H_2 = \alpha 260 + (1 - \alpha)180 = 80\alpha + 180$$

$$H_3 = \alpha 240 + (1 - \alpha)220 = 20\alpha + 220$$

Dado que, para cualquier valor de a comprendido entre 0 y 1, H_1 es mayor que H_2, según este criterio la estrategia E_1 es siempre preferible a la E_2.

— E_1 será preferible a E_3 para aquellos valores de α tales que:

$$H_1 > H_3 \rightarrow 80\alpha + 200 > 20\alpha + 220 \rightarrow 60\alpha > 20 \rightarrow \alpha > 1/3$$

La estrategia E_1, es mejor que la E_3 para valores de α comprendidos entre 1/3 y la unidad.

— E_2 será preferible a E_3 para los valores de α tales que:

$$H_2 > H_3 \rightarrow 80\alpha + 180 > 20\alpha + 220 \rightarrow 60\alpha > 40 \rightarrow \alpha > 2/3$$

La estrategia E_2 es mejor que la E_3 para valores de α comprendidos entre 2/3 y la unidad.

Por otra parte, cuando $\alpha = 0$ (criterio pesimista):

$$H_1 = 200$$
$$H_2 = 180$$
$$H_3 = 220$$

y, cuando $\alpha = 1$ (criterio optimista):

$$H_1 = 280$$
$$H_2 = 260$$
$$H_3 = 240$$

Estos resultados se han sintetizado en la figura 1.2, en la que se observa que, según el criterio de Hurwicz, para valores de α comprendidos entre 0 y 1/3 es preferible la estrategia H_3 y a partir de este coeficiente de optimismo la estrategia preferible es la H_1. Si se aplica este criterio de optimismo parcial, la estrategia H_2 no es aplicable cualquiera que sea el coeficiente de optimismo que se considere adecuado.

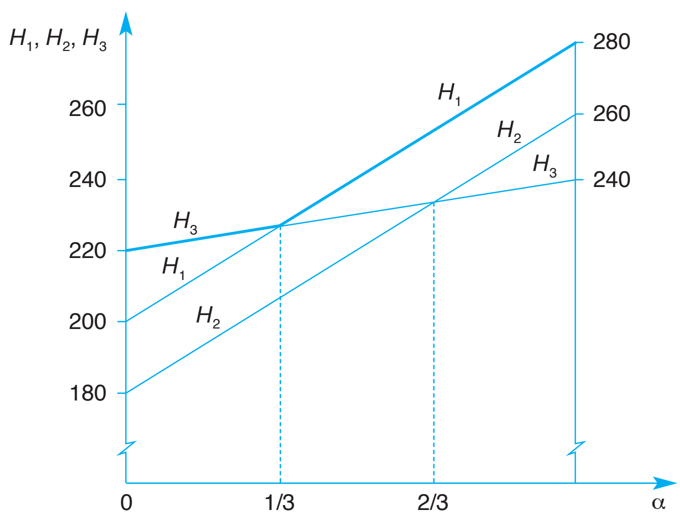

FIGURA 1.2

e) Criterio de Savage. En la tabla 1.13 se recoge la matriz de pesares correspondiente a este caso:

TABLA 1.13

		Estados de la naturaleza			Máximo pesar
		S_1	S_2	S_3	
Estrategias	E_1	20	40	0	40
	E_2	40	0	40	40
	E_3	0	20	48	48

Según este criterio de limitación del máximo pesar, las estrategias E_1 y E_2 son igualmente preferibles sobre la estrategia E_3.

Problema 1.1.9 Juego de suma nula

Suponiendo que S_1, S_2 y S_3 fuera estrategias que puede elegir el decisor *B* y que los resultados recogidos en la matriz de decisión del enunciado del problema anterior fueran las pérdidas experimentadas por este decisor y las ganancias obtenidas por el jugador *A* (Ciuned que puede elegir entre las estrategias E_1, E_2 y E_3), se desea saber cuál es la solución del juego.

Resolución

En la resolución del problema anterior se comprobó que ninguna de las estrategias de *A* está dominada. En cuanto a *B*, en la tabla 1.14 se recogen las mejores estrategias para cada alternativa elegida por *A*.

TABLA 1.14

Alternativa	Estrategia óptima de *B*
E_1	S_1
E_2	S_1
E_3	S_1

Las estrategias S_2 y S_3, de *B*, se encuentran dominadas por la alternativa S_1. Cualquiera que sea la decisión de *A*, la mejor elección de *B* es la estrategia S_1, con la que consigue la menor pérdida posible en cada caso. Por tanto, *B* se decidirá por la alternativa S_1 y, como *A* sabe que *B* actuará de este modo, elegirá la estrategia que le proporcione la mayor ganancia bajo esa elección de *B*; es decir, la estrategia E_3. Con ello, la solución del juego es que *A* gana, y *B* pierde, 220.

Problema 1.1.10 Criterios de decisión en situación de incertidumbre

En la matriz de decisión de la tabla 1.15 se recogen los resultados asociados a cada una de las estrategias (E_1, E_2 y E_3) que puede seguir la empresa Unisa según cual sea el estado de la naturaleza (S_1, S_2 o S_3) que se presente.

TABLA 1.15

		Estados de la naturaleza		
		S_1	S_2	S_3
Estrategias	E_1	880	800	1160
	E_2	1000	700	960
	E_3	960	880	920

Tales resultados son tanto más adversos a Unisa cuanto mayores son sus valores. Se desea saber si hay alguna estrategia dominada y cuál es la alternativa preferible según los distintos criterios de decisión aplicables en situación de incertidumbre.

Resolución

En este caso la empresa trata obtener un resultado lo más pequeño posible. Las estrategias óptimas bajo cada uno de los estados se recogen en la tabla 1.16.

TABLA 1.16

Estado	Estrategia óptima
S_1	E_1
S_2	E_2
S_3	E_3

Evidentemente, en este caso ninguna estrategia está dominada.

En la tabla 1.17 se recogen los datos precisos para resolver el problema de acuerdo con los criterios de Laplace, optimista, pesimista y de Hurwicz.

TABLA 1.17

Estrategia (E_i)	Laplace	Máximo (M_i)	Mínimo (m_i)	$H_i = \alpha m_i + (1 - \alpha) M_i$
E_1	946,67	1160	800	$H_1 = \alpha 800 + (1 - \alpha)1160 = 1160 - 360\alpha$
E_2	886,67	1000	700	$H_2 = \alpha 700 + (1 - \alpha)1000 = 1000 - 300\alpha$
E_3	920	960	880	$H_3 = \alpha 880 + (1 - \alpha)960 = 960 - 80\alpha$

Partiendo del criterio de Laplace, la mejor estrategia es la E_2.

Según el criterio optimista (*minimin*, en este caso), la estrategia óptima es la E_2.

De acuerdo con el criterio pesimista (*minimax*, en esta ocasión) la alternativa preferible es la E_3. En cuanto al criterio de Hurwicz, se tiene que:

—La estrategia E_1 será preferible a la E_2 para los valores de α tales que:

$$H_1 < H_2$$

Es decir:

$$1160 - 360\alpha < 1000 - 300\alpha \;\rightarrow\; 160 < 60\alpha \;\rightarrow\; \alpha > 2{,}67$$

E_1 sería preferible a E_2 para valores de α superiores a 2,67, pero este coeficiente sólo puede tomar valores comprendidos entre 0 y 1. Por consiguiente, la estrategia E_1 nunca es preferible a la E_2, de acuerdo con este criterio. Dicho de otro modo, para cualquier valor admisible de α, E_2 es mejor que E_1.

—La estrategia E_2 será preferible a la E_3 para los valores de α tales que:

$$H_2 < H_3$$

O, lo que es lo mismo:

$$1000 - 300\alpha < 960 - 80\alpha \;\rightarrow\; 40 < 220\alpha \;\rightarrow\; \alpha > 0{,}1818$$

Para los valores de α comprendidos entre 0 y 0,1818 es preferible la estrategia E_3. A partir de este valor del coeficiente de optimismo, y hasta la unidad, es preferible la alternativa E_2.

Por otra parte, cuando $\alpha = 0$ (criterio pesimista):

$$H_1 = 1160$$

$$H_2 = 1000$$

$$H_3 = 960$$

Y cuando $\alpha = 1$ (criterio optimista):

$$H_1 = 800$$

$$H_2 = 700$$

$$H_3 = 880$$

Los resultados obtenidos se han representado en la figura 1.3, en la que se observa que, según este criterio, la alternativa E_1 no es preferible en ningún caso, que la E_3 es la mejor para el decisor que aplica un coeficiente de optimismo inferior al 18,18 por 100 y que, a partir de este valor del coeficiente, es preferible la estrategia E_2.

En cuanto al criterio de Savage, en la tabla 1.18 se recoge la matriz de pesares.

		Estados de la naturaleza			Máximos pesares
		S_1	S_2	S_3	
Estrategias	E_1	0	100	240	240
	E_2	120	0	40	120
	E_3	80	180	0	180

TABLA 1.18

La estrategia óptima, según el criterio de Savage, es la E_2, a la que le corresponde el mínimo entre los máximos pesares en los que se puede incurrir.

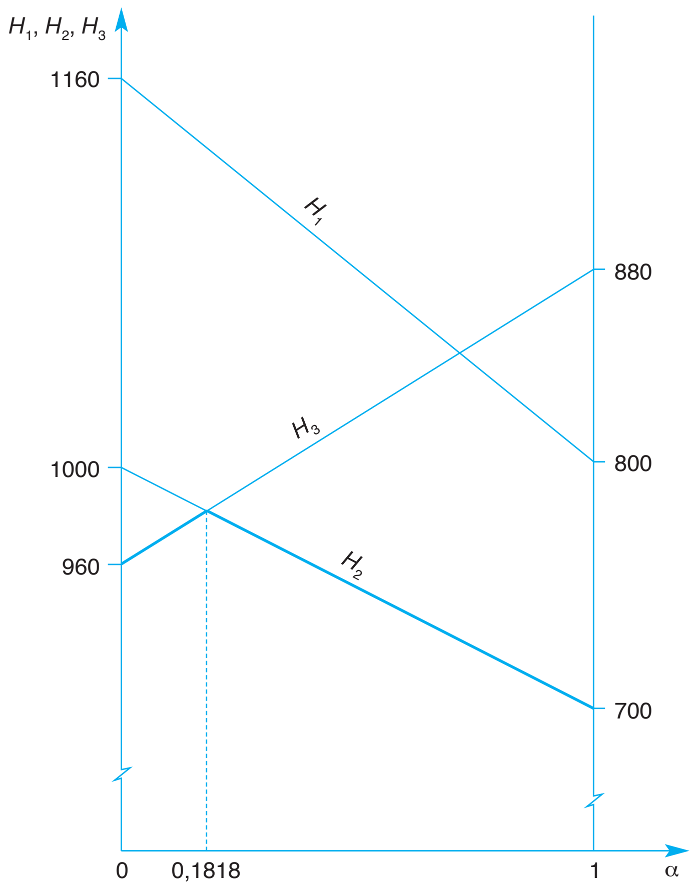

FIGURA 1.3

Problema 1.1.11

Juego de suma nula

En la siguiente matriz, *P* es el perdedor y *G* es el ganador. ¿Cuántos puntos de silla existen?

TABLA 1.19

		Estrategias de *P*		
		X	*Y*	*Z*
Estrategias de *G*	*A*	−150	75	30
	B	150	−75	−30
	C	30	−30	−15

Resolución

Cuando, como en este caso, las columnas se corresponden con las posibles decisiones del perdedor y las filas con las del ganador, la técnica más, sencilla para encontrar un punto de silla es determinar un número que sea el menor de su fila y el mayor de su columna. En la fila *A* el menor número es −150 (*G* pierde y *P* gana 150), pero no es el mayor de su columna. En la fila *B*, el número más bajo es −75 (*G* pierde y *P* gana 75), pero tampoco es el mayor de su columna. Finalmente, en la fila *C*, el menor número es −30 (*G* pierde y *P* gana 30), pero tampoco éste es el mayor de su columna. Por consiguiente, no existe ningún punto se silla.

Problema 1.1.12

Juego de suma nula

En la siguiente matriz, *P* es el perdedor y *G* es el ganador. ¿Cuántos puntos de silla existen?

TABLA 1.20

		Estrategias de *P*		
		X	*Y*	*Z*
Estrategias de *G*	*A*	0	180	144
	B	240	60	96
	C	144	96	108

Resolución

No hay ningún punto de silla porque no existe ningún número que sea el mínimo de su fila y el máximo de su columna.

Problema 1.1.13 Juego de suma nula

En la siguiente matriz, *P* es el perdedor, y *G* es el ganador. ¿Cuántos puntos de silla existen?

TABLA 1.21

		Estrategias de *P*		
		X	***Y***	***Z***
Estrategias de *G*	***A***	−300	50	20
	B	−200	−50	−20
	C	−400	−20	−10

Resolución

En este caso existe un punto de silla: −200, que es el menor de su fila y el mayor de su columna.

Problema 1.1.14 Juego de suma nula

En la siguiente matriz, *P* es el perdedor y *G* es el ganador. ¿Cuántos puntos de silla existen?

TABLA 1.22

		Estrategias de *P*		
		X	***Y***	***Z***
Estrategias de *G*	***A***	−200	100	40
	B	200	−100	−40
	C	40	−40	−20

Resolución

Para que exista un punto de silla debe determinarse aquel número que sea el menor de su fila y el mayor de su columna. En este caso, no encontramos ninguno con esas características por lo que no habrá ningún punto de silla.

Problema 1.1.15 Juego de suma nula

En la siguiente matriz, *P* es el perdedor, y *G* es el ganador. ¿Cuántos puntos de silla existen?

TABLA 1.23

		Estrategias de *P*		
		X	***Y***	***Z***
Estrategias de *G*	***A***	100	250	220
	B	300	150	180
	C	220	180	190

RESOLUCIÓN

Para que exista un punto de silla debe determinarse aquel número que sea el menor de su fila y el mayor de su columna. En este caso, no encontramos ninguno con esas características por lo que no habrá ningún punto de silla.

Problema 1.1.16 Juego de suma nula

En la siguiente matriz, *P* es el perdedor, y *G* es el ganador. ¿Cuántos puntos de silla existen?

TABLA 1.24

		Estrategias de *P*		
		X	***Y***	***Z***
Estrategias de *G*	***A***	0	-100	100
	B	0	0	200
	C	-100	-200	300

RESOLUCIÓN

En este caso, existen dos números, (los dos ceros de la fila B, resaltados en la siguiente tabla), que cumplen con la condición de ser el menor de su fila y el mayor de su columna. Por consiguiente, existen dos puntos de silla.

TABLA 1.25

		Estrategias de *P*		
		X	***Y***	***Z***
Estrategias de *G*	***A***	0	-100	100
	B	0	0	200
	C	-100	-200	300

Además, este juego es justo, pues su solución vale cero. Se dice que un juego es justo cuando ningún jugador tiene ventaja sobre el otro.

Problema 1.1.17 Juego de suma nula

En la siguiente matriz, P es el perdedor y G es el ganador. ¿Se puede eliminar alguna estrategia? ¿Cuál es la solución del juego?

		Estrategias de *P*		
		X	***Y***	***Z***
Estrategias de *G*	***A***	100	200	400
	B	100	0	500
	C	0	100	-100

TABLA 1.26

Resolución

Se puede eliminar una estrategia cuando está dominada por otra, es decir, si existe otra estrategia que siempre es al menos tan buena como ésta, sin importar lo que hace el oponente. El jugador P no tiene ninguna estrategia dominada, pero, en cuanto al jugador G, su estrategia C está dominada por la A, pues, haga lo que haga P, G siempre obtiene un resultado mejor con la estrategia A que con la C.

Al eliminar la fila correspondiente a la estrategia C, se obtiene la matriz de la siguiente tabla:

		Estrategias de *P*		
		X	***Y***	***Z***
Estrategias de *G*	***A***	100	200	400
	B	100	0	500

TABLA 1.27

Esta será la tabla que tendrá en cuenta el jugador P, pues sabe que G nunca seguirá la estrategia C. Al hacerlo, P observa que su estrategia Z está dominada por las otras dos, pues siempre pierde más con esa estrategia que si sigue la X o la Y. Con lo cual, eliminará esa columna, y obtendrá la de la siguiente tabla:

		Estrategias de *P*	
		X	***Y***
Estrategias de *G*	***A***	100	200
	B	100	0

TABLA 1.28

El jugador G sabe que P eliminará la estrategia Z, por lo cual tomará su decisión teniendo en cuenta esta última matriz, y, al hacerlo, se encontrará con que su elección B se está dominada por la A, por lo cual la eliminará y obtendrá la siguiente "tabla":

TABLA 1.29

		Estrategias de *P*	
		X	***Y***
Estrategias de *G*	***A***	100	200

Por consiguiente, G eligirá la única estrategia que le resta (A) y P, que lo sabe, elegirá X (esta estrategia domina a la Y), con lo cual la solución del juego es que G gana, y P pierde, 100. El punto de silla se encuentra en el cruce de la fila A con la columna G.

Problema 1.1.18 Juego de suma nula

En la siguiente tabla se recogen los resultados correspondientes a las distintas estrategias que pueden seguir los jugadores G (A, B, y C), que es el ganador, y P (estrategias X, Y, y Z) que es el perdedor. Se desea cuántos puntos de silla existen.

TABLA 1.30

		Estrategias de *P*		
		X	***Y***	***Z***
Estrategias de *G*	***A***	6	15	-35
	B	-6	-15	35
	C	-3	-6	6

Resolución

No existe ningún número que sea el menor de su fila y el mayor de su columna. Por consigueinte, este juego no tiene ningún punto de silla.