1. ECUACIONES DIFERENCIALES

Generalidades

Ecuación diferencial (ED): es una ecuación funcional que relaciona una función y sus derivadas al menos una, respecto a una o varias variables independientes.

Ecuación diferencial ordinaria (EDO): ecuación diferencial en la que existe una única variable independiente.

Ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP): ecuación diferencial en la que intervienen dos o más variables independientes.

– **Orden** de una ecuación diferencial: es el mayor orden de derivación que figura en la ecuación.

– **Solución** de una ecuación diferencial: es una función que, sustituida junto con sus derivadas en la ecuación, conduce a una identidad.

– **Resolver o integrar** una ecuación diferencial: es obtener todas sus soluciones, usualmente dadas por su solución general.

La solución general de las ecuaciones diferenciales ordinarias, dependen de tantas constantes indeterminadas como orden tenga la ecuación; mientras que, la solución general de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, dependen de tantas funciones indeterminadas como orden tenga la ecuación.

– **ED lineal:** es una ecuación diferencial de primer grado en la función y sus derivadas (los coeficientes de la función y sus derivadas dependen a lo sumo de la/s variable/s independiente/s de la ecuacion).

2. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDOs)

Son ecuaciones funcionales que relaciona una cierta función incógnita, dependiente de una sola variable y una derivada al menos de la función.

Ejemplo: $y'' + y' + 4x = \text{sen } x$

Cuando en una EDO es posible despejar la máxima derivada de la función presente en la ecuación, se dice que la ecuación esta expresada en forma normal o explícita; en caso contrario, se dice dada en forma implícita.

En general, las soluciones de una EDO pueden ser de tres tipos:
– Solución particular.
– Solución general.
– Solución singular.

y pueden venir definidas por funciones expresadas en forma explícita, implícita o paramétrica.

A las gráficas de las soluciones, se las llama curvas integrales de la ecuación diferencial.

Cuando las soluciones de una EDO se obtienen mediante el cálculo de integrales, se dice que la ecuación diferencial se integra mediante cuadraturas.

El problema de encontrar la solución de una EDO tal que ella y sus derivadas, hasta el orden de la ecuación, tomen un valor fijo en un punto de su intervalo de integración, constituye lo que se llama un problema de valor inicial (PVI). La razón de esta terminología estriba en que, en muchas aplicaciones, la variable independiente de la ecuación representa el tiempo y las condiciones iniciales se epecifican en el instante en que proceso en estudio comienza.

Centrándonos inicialmente en las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, vamos a establecer una serie de conceptos relativos a las mismas.

Como ya sabemos una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, puede venir formulada, en una de las dos formas siguientes:

$$F(x, y, y') = 0; \quad \text{forma implícita}$$

$$y' = f(x, y); \quad \text{forma explícita o normal}$$

Interpretación geométrica: establecen una relación, en cada punto de su intervalo de integración, entre la variable independiente, la función y la pendiente.

– Solución particular de una EDO de primer orden. Es una función $y = f(x)$ que verifica idénticamente la ecuación y representa gráficamente una curva plana.
– Solución general de una EDO de primer orden. Es una función $y = \varphi(x, C)$ que verifica idénticamente la ecuación, para todos los valores de la constante C, y representa gráficamente una familia uniparamétrica de curvas planas (: = curvas involutas de la ED). Asignando un valor a la constante C se obtiene una solución particular. En general, la constante C se determina imponiendo la condición de que la curva integral correspondiente pase por un punto dado.
– Solución singular de una EDO de primer orden, es una **posible** solución de la misma, no incluida en su solución general tal que, en cada uno de sus puntos, es tangente a una curva de la familia de curvas solución general de la ecuación (tendrán la misma pendiente por ser soluciones de la misma ecuación diferencial); con la condición, de que sus puntos sean **puntos ordinarios** de la cuvas de la familia que identifican la solución general de la ED considerada.

La solución singular de una ED no siempre existe y caso de exista, identifica una curva envolvente de la familia de curvas solución general $y - \varphi(x, C) = 0$ que puede obtenerse eliminando la costante C entre las ecuaciones (ver Anexo I):

$$\Psi(x, y, C) = y - \varphi(x, C) = 0 \;\wedge\; \frac{\partial \Psi(x, y, C)}{\partial C} = 0$$

Las EDOs lineales, no admiten soluciones singulares.

Génesis de la ecuación a partir de su solución general

Conocida la solución general $\psi\,(x, y, C) = 0$ de una ED de primer orden que define, en una cierta región del plano R, una familia o haz de curvas tal que por cada punto de R pasa una curva y solo una de la familia, eliminando C entre las ecuaciones:

$$\psi\,(x, y, C)= 0, \qquad d / dx\,[\psi\,(x, y, C)]= 0$$

se obtiene la ecuación diferencial del haz; la cual, por ser independiente de C, es verificada por todas las curvas de la familia.

Dado que como acabamos de ver, la génesis de una ED es un problema de derivación y eliminación, es inmediato concluir que el problema básico que se plantea en la teoría de las ecuaciones diferenciales reside fundamentalmente en la determinación de sus soluciones.

2.1. EDOs de primer orden explícitas

Son ecuaciones diferenciales expresadas en la forma normal; es decir, dadas por:

$$y' = f\left(x, y\right)$$

A continuación, vamos a enunciar un teorema que proporciona condiciones suficientes para la existencia de soluciones de esta ecuación:

Problema de valor inicial (PVI):

$$\left\{\begin{matrix} y' = f\left(x, y\right) \\ y\left(x_0\right) = y_0 \end{matrix}\right\}$$

Teorema de existencia y unicidad de soluciones

1º) Si $f\left(x, y\right)$ es continua en un entorno del punto (x_0, y_0) $\Longrightarrow$ existe solución del PVI.

2º) Si, además, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ es continua en un entorno del punto (x_0, y_0) $\Longrightarrow$ la solución del PVI es única.

Ejemplo:

Resolver la ecuación diferencial $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$

La ecuación diferencial dada, cumple que:

$3y^{\frac{2}{3}}$: función continua $\forall(x,y)\in\mathbf{R}^2 \Rightarrow \exists$ solución $\forall(x,y)\in\mathbf{R}^2$

$$\frac{\partial\left(3y^{\frac{3}{2}}\right)}{\partial y}=2y^{-\frac{1}{3}}$$: función continua en $\mathbf{R}^2$ excepto en $y=0$

$$\Rightarrow \exists \text{ solución y es única } \forall(x,y)\in\mathbf{R}^2 \,/\, y\neq 0$$

Por lo tanto, las soluciones de la ED considerada son:

$$y\neq 0:\ y'=3y^{\frac{2}{3}} \ \Rightarrow\ y=(x+C)^3$$

Trivialmente puede comprobarse que $y = 0$ también es solución de la ecuación (que no puede obtenerse asignando un valor a la constante de la expresión uniparamétrica obtenida) y cumple ser la envolvente de la familia de curvas $y = (x + C)^3$ que identifica la solución general de la ecuación diferencial dada y por lo tanto, es una solución singular de la misma, verificándose que por cada punto de $y = 0$ pasa una curva de la familia de curvas solución general de la ecuación diferencial, con la mima pendiente.

2.1.1. Tipos elementales de EDOs de primer orden explícitas

2.1.1.1. Ecuaciones separables o ecuaciones de variables separadas

Son ecuaciones diferenciables de la forma:

$$y'=f(x)g(y)$$

o alternativamente dadas también por:

$$P(x)dx+Q(y)dy=0$$

cuyas soluciones son:

$$y'=f(x)g(y)\Rightarrow_{g(y)\neq 0}\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C\Rightarrow G(y)+F(x)=C$$

Es interesante señalar que debido a que al dividir por cero se pueden perder soluciones de la ecuación, es preciso verificar si $g(y) = 0$ conduce o no a soluciones de la ecuación diferencial no incluidas en su solución general.

2.1.1.2. Ecuaciones diferenciales exactas y factores integrantes

Ejemplo: Integrar la ecuación diferencial separable:

$$y' = x / y$$

Separando variables en la ecuación diferencial dada se obtiene la ecuación:

$$y\,dy = x\,dx$$

ecuación diferencial elementalmente integrable, cuya solución general es:

$$y^2 = x^2 + C$$

Una ecuación diferencial de la forma:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

se dice que es una ecuación diferencial exacta si existe una función *u (x, y)*, denominada función potencial, tal que:

$$du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

lo cual es equivalente a decir que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) \quad \wedge \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$$

en cuyo caso, la ecuación diferencial dada puede expresarse en la forma *du (x, y)* = 0 y su solución general es: *u (x, y) = cte*.

Teorema

Si $P, Q \in C^1$ (*D*), siendo *D* un abierto simplemente conexo, la ecuación diferencial:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

cumple ser diferencial exacta si y solo si se verifica la igualdad de las derivadas cruzadas; es decir, si se cumple que:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Ejemplo: Integrar la euación diferencial exacta:

$$(2xy + 3y)\, dx + (x^2 + 3x)\, dy = 0$$

Calculamos la función potencial:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + 3y \;\rightarrow\; u(x,y) = \int (2xy + 3y)dx + \varphi(y) =$$

$$= x^2 y + 3xy + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 3x = x^2 + 3x + \varphi'(y) \;\rightarrow\; \varphi'(y) = 0 \;\rightarrow \varphi(y) = cte$$

$$\rightarrow\; u\,(x,y) = x^2 y + 3xy$$

La solución general de la ecuación diferencial es: $x^3 y + 3xy = C$

Otro método:

$$u\,(x, y) = \int^{x}_{x_0} P(x,y)\, dx + \int^{y}_{y_0} Q(x_0, y)\, dy = x^2y + 3xy + (-x_0^2 y_0 - 3x_0 y_0) = x^2y + 3xy + cte$$

Generalización

Los resultados obtenidos se pueden generalizar a expresiones diferenciales de la forma:

$$X\,(x, y, z)\, dx + Y\,(x, y, z)\, dy + Z\,(x, y, z)\, dz = 0$$

que verifiquen la igualdad de las derivadas cruzadas, sobre la hipótesis de continuidad de las parciales.

Factor integrante de la ecuación diferencial:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

es una función no nula $\mu(x, y)$ tal que, multiplicada la ecuación por esta función resulta ser una ecuación diferencial exacta; es decir, verifica que:

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{(\mu Q)}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \quad P\partial\mu/\partial y + \mu\,\partial P/\partial y = Q\partial\mu/\partial x + \mu\,\partial Q/\partial x$$

Tipos de factores integrantes

Entre otros, algunos tipos de factores integrantes de utilidad, sencillos de validar que existen y fáciles de calcular, son los siguientes:

Factor integrante que depende solo de x

Prueba de existencia y cálculo de μ (x)

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{(\mu Q)}{\partial x} \Rightarrow d\mu/\mu = \frac{\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x}{Q} dx = (\textit{función que depende solo de x })dx$$

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int\left(\frac{\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x}{Q}\right)dx}$$

Análogamente, pueden validarse y calcularse los factores integrantes siguientes:

Factor integrante que depende solo de y

Prueba de existencia y cálculo de μ (y)

μ (y) = dμ / μ = [(∂ Q/∂ x – ∂ P/∂ y) / P] dy = *(función que depende solo de y) dy*

$$\Rightarrow \mu(y) = e^{\int\left(\frac{\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y}{P}\right)dy}$$

Factor integrante que depende del producto de x por y

Prueba de existencia y cálculo de μ (x, y)

Hacemos el cambio: u = x y

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{(\mu Q)}{\partial x} \Rightarrow d\mu / \mu = \frac{\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y}{xP - yQ} du = (\textit{función que depende solo de u}) du$$

$$\Rightarrow \mu(x, y) = e^{\int\left(\frac{\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y}{xP - yQ}\right)du}$$

Otros factores integrantes sencillos de detectar y calcular, siguiendo la metodología realizada en los casos anteriores, son los siguientes:

Factor integrante que depende de x + y:

$$\Rightarrow \mu(x+y) = e^{\int\left(\frac{\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y}{P-Q}\right)du} \quad , \quad u = x + y$$

Factor integrante que depende de y / x:

$$\Rightarrow \mu(y/x) = e^{\int\left(\frac{\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y}{P/x + Qy/x^2}\right)du} \quad , \quad u = y/x$$

Ejemplo: Integrar la ecuación diferencial:

$$\left(4x^2 + y\right)dx - xdy = 0$$

Sabiendo que admite un factor integrante que depende solo de x, dado por:

$\mu(x) = 1/x^2 \quad \Rightarrow \left(4 + \frac{y}{x^2}\right)dx - \frac{1}{x}dy = 0$ es una ecuación diferencial exacta.

Integrando, se obtiene la función potencial:

$$u(x, y) = 4x + y/x + cte$$

Y la solución general de la ecuación diferencial dada es: $4x - y/x = C$

2.1.1.3. Ecuaciones homogéneas

Son ecuaciones diferenciales de la forma $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$ tales que las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ verifican ser funciones homogéneas del mismo grado $n \in N$ en x e y; por lo tanto, expresadas despejando y', tienen un segundo miembro que es una función homogénea de grado cero en las variables x e y, que puede escribirse en la forma:

$$y' = f(y/x)$$

Para su resolución, se efectúa en la misma el cambio de función, dado por:

$$y = z\,x, \quad dy/dx = z + x\,dz/dx$$

y se transforma en una ecuación diferencial de variables separadas:

$$x\,dz/dx = f(z) - z \quad \Rightarrow \quad dz/[f(z) - z] = dx/x$$

siendo preciso comprobar si $x = 0$ es o no es solución de la ecuación diferencial considerada y si los valores de z para los cuales $f(z) - z = 0$, aportan o no soluciones adicionales a la misma (porque, si $z = k$ es uno de estos valores, entonces $y = kx$ satisface la ecuación diferencial).

Es interesante señalar que, por verificarse que las ecuaciones diferenciales homogéneas expresadas en la forma:

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$$

admiten un factor integrante definido por:

$$\mu\ (x, y) = 1 / (Px + Qy)$$

También es posible integrarlas, calculando el factor integrante correspondiente y reduciéndolas a una ecuación diferencial exacta.

Nota: por simple inspección es trivial ver que $x = 0$ es solución de la ecuación diferencial dada; mientras que, debido a cumplirse que:

$$f(z) - z = 0 \Rightarrow 1 + z^2 = 0$$

y esta ecuación no se verifica para ningún valor real de z, la anulación de esta expresión no origina soluciones adicionales para la ecuación diferencial considerada.

Ejemplo: Integrar la ecuación diferencial homogénea:

$$(x^2 - y^2)\, dx + 2xy\, dy = 0$$

Para obtener su solución, hacemos el cambio de variables siguiente:

$$z = y / x$$

y obtenemos la ecuación diferencial:

$$dx / x = -2z / (1 + z^2)\, dz$$

Integrando, resulta:

$$L\, x = L\, C + L\, (1 + z^2)$$

Deshaciendo el cambio de variables efectuado, la solución de la la ecuación diferencial dada es:

$$x^2 + y^2 = Cx$$

$x = 0$ es también solución de la ecuación dada.

2.1.1.4. Ecuaciones lineales

Son ecuaciones diferenciales de la forma:

$$a(x)\,y' + b(x)\,y = \phi(x)$$

siendo, en general, *a(x)* y *b(x)* funciones definidas en un cierto intervalo *I* de la recta real; verificándose que, en cualquier intervalo $I \subset \mathbf{R}$ en el que $a(x) \neq 0$, es posible escribir esta ecuación en la forma:

$$y' + p(x)\,y = q(x)$$

siendo:

$$p(x) = \frac{\phi(x)}{a(x)} \quad \text{y} \quad q(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$$

Si las funciones *a(x)* y *b(x)* son constantes, se dice que la ecuación diferencial es lineal de coeficientes constantes.

Cuando el segundo miembro de la ecuación es igual a cero, se dice que la ecuación es homogénea y se denomina no homogénea o completa en caso contrario.

Respecto a estas ecuaciones, es interesante señalar, que no admiten soluciones singulares y por lo tanto su solución general describe el conjunto de todas las soluciones posibles de la ecuación.

Para resolver estas ecuaciones, entre otras posibilidades, se procede en la forma siguiente:

1) Se resuelve la ecuación homogénea:

$$y' + p(x)\,y = 0 \ : \ \text{ecuación separable}$$

y se obtiene su solución general dada por:

$$y_H = C\,e^{-\int P(x)dx}\ , C \in \mathbf{R}$$

2) Se resuelve la ecuación completa aplicando el método de variación de las constantes

$\Rightarrow$ ensayar como solución de la ecuación diferencial completa una función de la forma:

$$y_C = C(x)e^{-\int P(x)dx} \ \wedge \ y'_C = C'(x)e^{-\int P(x)dx} + C(x)\left[-p(x)e^{-\int P(x)dx}\right]$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación diferencial completa, resulta: