Capítulo I

Cálculo numérico

1. INTRODUCCIÓN

1. Representación de un número por una letra. Es común representar un número[1] por una letra. Así, si las letras a y b designan dos números, representaremos los resultados de las *operaciones*[2] entre ellos de esta manera:

$$\text{su } \textit{suma} \text{ por: } a+b, \quad \text{su } \textit{diferencia} \text{ por: } a-b, \quad \text{su } \textit{producto} \text{ por: } ab,$$
$$\text{y si } b \text{ no es el número } 0, \text{ su } \textit{cociente} \text{ por: } a/b.$$

Para el producto ab también es común la notación: $a \cdot b$. El punto: '$\cdot$', se suprime sólo si no hay lugar a confusión (si quisiéramos, por ejemplo, escribir el producto de los números 36 y 2, este punto sería necesario: $36\cdot 2$); también se utiliza a veces, aun sin hacer falta, para enfatizar. Para el cociente a/b también hay otras notaciones (cf. sección 2, p. 13):

$$\frac{a}{b}, \quad \text{o bien} \quad a : b.$$

El **opuesto** del número a es el número $-a$. El **inverso** del número a es el número $1/a$, que está definido a condición de que a no sea el número 0.

[1] Sobre las clases de números que manejaremos (naturales, enteros, racionales y reales, así como los decimales), puede consultarse el Apéndice (cf. p. 145).

[2] Las operaciones entre números que vamos a tratar son estas: *adición*, *sustracción*, *multiplicación* y *división*. El resultado de la adición de dos números es su *suma*; el de la sustracción es su *diferencia*; el de la multiplicación, su *producto*; y el de la división, su *cociente*.

Por otra parte, representaremos las *relaciones* entre los números a y b de esta forma:

si a y b son *iguales*, escribiremos: $a = b$,

si a es *menor* que b, escribiremos: $a < b$,

si a es *mayor* que b, escribiremos: $a > b$,

si a es *menor o igual* que b, escribiremos: $a \leqslant b$,

si a es *mayor o igual* que b, escribiremos: $a \geqslant b$.

La primera de estas relaciones: $a = b$, es una **igualdad**; las restantes son **desigualdades**. Tanto en una igualdad como en una desigualdad, es común denominar *primer miembro* a lo que figura escrito a la izquierda del signo correspondiente, y *segundo miembro* a lo que figura escrito a la derecha.

El interés de esta representación literal de los números es mostrar las propiedades generales que verifican y que no dependen de los números particulares que pudieran considerarse. La representación literal permite poner de manifiesto propiedades que, manejando números particulares, podrían pasar desapercibidas.

Veamos un ejemplo de esto que queremos decir. Consideremos el número de tres cifras 963; si invertimos el orden de sus cifras, obtenemos: 369; la diferencia entre estos dos números es: $963 - 369 = 594$. Hasta aquí no se ha dicho nada llamativo, pero consideremos una representación literal de la situación. Sea A un número de tres cifras, y denotemos su cifra de las centenas por c, su cifra de las decenas por d, y su cifra de las unidades por u; entonces: $A = 100c + 10d + u$. Si B designa el número cuyas cifras son las del número A pero con el orden invertido, entonces: $B = 100u + 10d + c$. Supongamos que c es mayor que u, de forma que, entre los números A y B, el mayor es A; se tiene:

$$\begin{aligned} A - B &= (100c + 10d + u) - (100u + 10d + c) \\ &= 100c + 10d + u - 100u - 10d - c = 99c - 99u = 99(c - u). \end{aligned}$$

¿Qué podemos concluir? La siguiente propiedad: la diferencia entre un número cualquiera de tres cifras y el que se obtiene invirtiendo el orden de éstas es un múltiplo de 99. Esta propiedad, verificada por *todos* los números naturales de tres cifras, no se deduce del simple examen de la igualdad entre números concretos que habíamos escrito: $963 - 369 = 594$.

2. Una observación sobre las igualdades. A partir de una igualdad, podemos obtener otras si llevamos a cabo las siguientes manipulaciones:

- sumamos, o restamos, un mismo número en ambos miembros;
- multiplicamos, o dividimos, ambos miembros por un número no nulo.

En concreto, si a, b y c son tres números y se verifica la igualdad $a = b$, entonces también se verifican estas otras:

$$a + c = b + c, \quad a - c = a - c; \quad \text{y si } c \neq 0\text{: } ac = bc, \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{c}.$$

Diremos que las igualdades $a = b$ y $a + c = b + c$ son *equivalentes*, y escribiremos:

$$a = b \iff a + c = b + c,$$

y lo mismo diremos de la igualdad $a = b$ y cada una de las otras tres igualdades anteriormente escritas: $a = b \Leftrightarrow a - c = b - c$, y si $c \neq 0$: $a = b \Leftrightarrow ac = bc$, $a = b \Leftrightarrow \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{c}$.

2. REGLAS DE CÁLCULO

1. Adición, sustracción y multiplicación. Recopilamos a continuación las reglas más importantes del cálculo numérico con estas tres operaciones: adición, sustracción y multiplicación. Con las letras a, b y c denotamos tres números cualesquiera:

1) Propiedad *asociativa* y propiedad *conmutativa*:

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \qquad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c,$$
$$a + b = b + a, \qquad a \cdot b = b \cdot a.$$

2) Reglas de los paréntesis:

$$a + (-b) = a - b,$$
$$a + (b + c) = a + b + c, \qquad a + (b - c) = a + b - c,$$
$$a - (b + c) = a - b - c, \qquad a - (b - c) = a - b + c.$$

3) Regla algebraica de los signos:

$$a \cdot (-b) = -ab, \qquad (-a) \cdot b = -ab, \qquad (-a) \cdot (-b) = ab.$$

4) Propiedad *distributiva*:

$$a \cdot (b + c) = ab + ac, \qquad a \cdot (b - c) = ab - ac.$$

5) Cuando un producto es nulo: afirmar que el producto de dos o más números es nulo es afirmar que al menos uno de ellos es nulo:

$$\text{si } a \cdot b = 0, \text{ entonces: } \quad \begin{cases} a = 0 \\ \quad \text{o} \\ b = 0. \end{cases}$$

Notación. El producto de un número a por sí mismo: $a \cdot a$, se denota: a^2, y se denomina **cuadrado** de a. La notación a^2 se lee: "a cuadrado". △

6) Regla de *simplificación*:

$$\text{si } ac = bc \text{ y } c \neq 0, \text{ entonces: } a = b.$$

(Se dice que la igualdad $ac = bc$ se ha simplificado por el número no nulo c.)

2. Igualdades notables. Estas igualdades nos muestran cómo *desarrollar* el cuadrado de una suma, el cuadrado de una diferencia, o el producto de una suma por una diferencia.

Igualdades notables. Si a y b son dos números cualesquiera, se verifica:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

3. Operaciones con números en escritura fraccionaria. A continuación recopilamos las reglas de cálculo más importantes concernientes a los números escritos en forma fraccionaria (igualdad y operaciones). Antes recordamos el concepto y la notación de *cociente*:

Si a y b son dos números, y b es no nulo: $b \neq 0$, entonces existe un único número x tal que: $bx = a$. De este número diremos es el **cociente** de a y b (o de a por b), y lo denotaremos: $\frac{a}{b}$, (o también: a/b, o $a : b$).

En particular, el cociente de 1 por un número *no nulo* a es el **inverso** de a: $1/a$.

En el enunciado de los siguientes resultados, supondremos que todas las escrituras fraccionarias son tales que sus *denominadores son distintos de cero*:

1) Igualdad de dos cocientes:

$$\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b} \quad \text{si } k \neq 0; \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{es equivalente a:} \quad ad = bc.$$

2) Regla algebraica de los signos:

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}; \qquad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}.$$

3) Adición:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}; \qquad \frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d}.$$

4) Multiplicación:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}; \qquad k \cdot \frac{a}{b} = \frac{ka}{b}.$$

5) División:

$$\frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}; \qquad \frac{1}{a/b} = \frac{b}{a}$$

(además del convenio establecido de que no se anulan los denominadores, en la primera igualdad se debe exigir que c sea no nulo, y en la segunda que a sea no nulo).

4. Ejercicios. Simplificar la escritura de los siguientes números:

4·1 $\dfrac{63}{105}$; **4·2** $\dfrac{3465}{2205}$;

4·3 $\dfrac{19{,}2}{40{,}8}$; **4·4** $\dfrac{2{,}5}{3}$.

5. Ejercicios. Sustituir el símbolo '$\bigcirc$' por alguno de los signos '+' o '·' de forma que se obtenga una igualdad:

5·1 $\dfrac{1 \bigcirc 2}{3} \bigcirc \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{6}$; **5·2** $\dfrac{3}{5} \bigcirc \dfrac{5}{3} = 1$;

5·3 $\dfrac{1}{3} \bigcirc \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{18}$; **5·4** $\dfrac{3}{2} \bigcirc \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{4}$.

6. Ejercicios. Efectuar las operaciones que se indican y expresar los resultados con un número entero o con el cociente de dos números enteros:

6·1 $\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{4}\right) - \left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{1}{2}$; **6·2** $\dfrac{\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3}}{\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{4}}$;

6·3 $\left(\dfrac{5}{18} - \dfrac{2}{27} - \dfrac{2}{9}\right) : \dfrac{4}{27}$; **6·4** $\dfrac{2 - \dfrac{8}{5}}{\dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{3}} : \dfrac{\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7}}{\dfrac{2}{5} - \dfrac{2}{7}}$.

7. Ejercicios. **7·1** ¿Cómo hay que colocar los paréntesis en '$7 - 1 : 2 \cdot 3$' para que, tras operar, obtengamos como resultado el número 1?, ¿y para obtener 11/2?

7·2 Si a, b, c, d, e, f, g y h son números cualquiera, demostrar se verifica:

$$(a-b)(c-d)(e-f)(g-h) + (d-c)(h-g)(a-b)(f-e) = 0.$$

7·3 Calcular el valor de x que verifica la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{x} = \frac{39}{30}.$$

7·4 Si eliminamos tres de los siete sumandos en la suma:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{48}$$

obtenemos como resultado 1. ¿Qué sumandos son?

7.5 Demostrar que la cifra de las unidades del producto de dos números naturales coincide con la cifra de las unidades del número obtenido al multiplicar las cifras de las unidades de los factores.

7.6 Los siguientes números:

$$\frac{99.645}{198.951} \quad \text{y} \quad \frac{417.392}{833.364},$$

¿son iguales?

Solución de los ejercicios del apartado 4 (p. 16). Se tiene:

4.1 $\dfrac{63}{105} = \dfrac{7 \cdot 9}{7 \cdot 15} = \dfrac{9}{15} = \dfrac{3 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \dfrac{3}{5};$

4.2 $\dfrac{3465}{2205} = \dfrac{5 \cdot 693}{5 \cdot 441} = \dfrac{693}{441} = \dfrac{3 \cdot 231}{3 \cdot 147} = \dfrac{231}{147} = \dfrac{3 \cdot 77}{3 \cdot 49} = \dfrac{77}{49} = \dfrac{7 \cdot 11}{7 \cdot 7} = \dfrac{11}{7};$

4.3
$$\frac{19{,}2}{40{,}8} = \frac{10 \cdot 19{,}2}{10 \cdot 40{,}8} = \frac{192}{408} = \frac{2 \cdot 96}{2 \cdot 204} = \frac{96}{204}$$
$$= \frac{2 \cdot 48}{2 \cdot 102} = \frac{48}{102} = \frac{2 \cdot 24}{2 \cdot 51} = \frac{24}{51} = \frac{3 \cdot 8}{3 \cdot 17} = \frac{8}{17};$$

4.4 $\dfrac{2{,}5}{3} = \dfrac{25}{30} = \dfrac{5 \cdot 5}{5 \cdot 6} = \dfrac{5}{6}.$

Solución de los ejercicios del apartado 5 (p. 16). Podemos escribir:

5.1 $\dfrac{1+2}{3} \cdot \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{6};$

5.2 $\dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{5}{3} = 1;$

5.3 $\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9} = \dfrac{2}{18};$

5.4 $\dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{4}.$

Solución de los ejercicios del apartado 6 (p. 16). Se verifica:

6.1
$$\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} = \left(\frac{1 \cdot 4 + 3 \cdot 3}{3 \cdot 4}\right) - \left(\frac{2 \cdot 2 + 3 \cdot 3}{3 \cdot 2}\right) + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{13}{12} - \frac{26}{12} + \frac{6}{12} = \frac{13 - 26 + 6}{12} = \frac{-7}{12};$$

6.2
$$\frac{\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3}}{\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{4}} = \frac{\dfrac{3-4}{12}}{\dfrac{4-6}{24}} = \frac{\dfrac{-1}{12}}{\dfrac{-2}{24}} = \frac{(-1) \cdot 24}{12 \cdot (-2)} = 1;$$

6.3
$$\left(\frac{5}{18} - \frac{2}{27} - \frac{2}{9}\right) : \frac{4}{27} = \frac{15 - 4 - 12}{54} : \frac{4}{27} = \frac{-1}{54} : \frac{4}{27} = \frac{-27}{54 \cdot 4} = -\frac{1}{8};$$

6.4 $$\frac{2-\dfrac{8}{5}}{\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{3}} : \frac{\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}}{\dfrac{2}{5}-\dfrac{2}{7}} = \frac{\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{4}{35}}{\dfrac{4}{15}\cdot\dfrac{2}{35}} = \frac{2\cdot 4\cdot 15\cdot 35}{5\cdot 35\cdot 4\cdot 2} = \frac{15}{5} = 3.$$

Solución de los ejercicios del apartado 7 (p. 16). **7.1** Por ejemplo, podríamos escribir:

$$(7-1):(2\cdot 3) = 6:6 = 1, \qquad 7-((1:2)\cdot 3) = 7-\frac{3}{2} = \frac{11}{2}.$$

7.2 Se tiene:

$$(d-c) = (-1)(c-d), \quad (h-g) = (-1)(g-h), \quad (f-e) = (-1)(e-f),$$

y en consecuencia:

$$\begin{aligned}
&(a-b)(c-d)(e-f)(g-h) + (d-c)(h-g)(a-b)(f-e) \\
&\quad = (a-b)(c-d)(e-f)(g-h) + (a-b)(d-c)(f-e)(h-g) \\
&\quad = (a-b)(c-d)(e-f)(g-h) + (a-b)(-1)(c-d)(-1)(e-f)(-1)(g-h) \\
&\quad = (a-b)(c-d)(e-f)(g-h) - (a-b)(c-d)(e-f)(g-h) \\
&\quad = 0.
\end{aligned}$$

7.3 Si multiplicamos los dos miembros de la igualdad del enunciado por 30, obtenemos:

$$15+10+6+5+\frac{30}{x} = 39, \quad \text{es decir:} \quad 36+\frac{30}{x} = 39.$$

Restando 36 en ambos miembros de la última igualdad, resulta:

$$\frac{30}{x} = 39-36 = 3.$$

El único número x tal que $30/x$ es igual a 3 es $x = 10$.

7.4 Si multiplicamos la suma del enunciado por 48, obtenemos:

$$24+12+8+6+4+3+1,$$

y lo que ahora buscamos es eliminar tres de los sumandos anteriores de forma que la suma restante sea igual a 48.

No podemos eliminar el primer sumando: 24; si así lo hiciéramos, con los restantes —que suman 34— no podríamos alcanzar el total de 48, y menos teniendo que eliminar aún dos sumandos más. El sumando 24 debe, pues, figurar, lo que reduce el problema a eliminar tres números entre 12, 8, 6, 4, 3 y 1, de forma que los que queden sumen 24.

Por la misma razón por la que no descartamos el sumando 24, no descartamos tampoco el 12: los restantes sumarían 22 y querríamos una suma de 24. Reducimos ahora el problema al de eliminar, en esta lista: 8, 6, 4, 3 y 1, tres números de forma que los dos que queden sumen 12. Sólo hay una forma de conseguir que dos de estos cinco números sumen 12: sumando 8 y 4, luego los tres que debemos eliminar son estos: 6, 3 y 1. Estos tres números se corresponden, en la suma original, con los sumandos 1/8, 1/16 y 1/48.

Nótese que efectivamente se tiene:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = 1.$$

7.5 Sea n un número natural cuya cifra de las unidades es a, y sea m un número natural cuya cifra de las unidades es b. Podemos escribir entonces:

$$n = 10x + a \quad \text{y} \quad m = 10y + b,$$

siendo x y y el número de decenas de n y m, respectivamente. Multiplicando n por m, obtenemos:

$$\begin{aligned} n \cdot m = (10x + a)(10y + b) &= (10x + a) \cdot (10y) + (10x + a) \cdot (b) \\ &= 100xy + 10ay + 10xb + ab. \end{aligned}$$

La cifra de las unidades del número $100xy + 10ay + 10xb$ es cero, luego la cifra de las unidades del producto $n \cdot m$ es igual a la cifra de las unidades del producto $a \cdot b$.

7.6 Con una calculadora de bolsillo podemos obtener para cada cociente una aproximación dada mediante un número decimal. Para ambos cocientes obtenemos el mismo número decimal: 0,500851969, luego una calculadora no los distingue. Sin embargo, estos dos números no son iguales; si lo fueran, deberían ser iguales los productos siguientes:

$$99.645 \cdot 833.364 \quad \text{y} \quad 198.951 \cdot 417.392,$$

pero la cifra de las unidades del primer producto es 0, y la del segundo es 2 (podemos hacer uso del ejercicio 7.5).

3. DESIGUALDADES

1. Notación de desigualdades. Dados dos números cualesquiera a y b, se verifica una y sólo una de las siguientes condiciones:

- a es menor que b, que se denota: $a < b$;
- a es mayor que b, que se denota: $a > b$;
- a es igual a b: $a = b$.

En esta sección aprenderemos algunos métodos que nos permitirán discernir cuál de estas tres condiciones es verificada por dos números dados. Ello nos hará manejar **desigualdades**, es decir, notaciones como "$a < b$" y "$a > b$".

Por ejemplo, dados los números 2 y $3/2$, es claro que el primero es mayor que el segundo: $2 > 3/2$; dados -1 y $-1/2$, el primero es menor que el segundo: $-1 < -1/2$.

> **Nota.** A veces escribiremos desigualdades "encadenadas", como por ejemplo: $a < b < c$. Es una forma de abreviar lo siguiente: $a < b$ y $b < c$. Nótese que si $a < b < c$, entonces $a < c$. △

Si a es un número, escribir $a > 0$ es lo mismo que decir que a es *positivo*; y escribir $a < 0$, lo mismo que decir que a es *negativo*.

La siguiente regla nos informa de cuál es el signo (positivo o negativo) de un producto y de un cociente.

> El producto y el cociente de dos números no nulos es:
>
> - *positivo* si ambos números tienen el mismo signo;
> - *negativo* si ambos números tienen signo contrario.

Es decir, dados dos números a y b no nulos, el producto ab y el cociente a/b son positivos si los números a y b son ambos positivos o ambos negativos; y ab y a/b son negativos si uno de los números a y b es positivo y el otro es negativo. Dos consecuencias de este resultado son estas:

- el *cuadrado* de un número no nulo, es decir, el producto del número por sí mismo, es positivo;
- el cociente a/b tiene el mismo signo que el producto ab.

2. Las desigualdades y las operaciones. Consideremos dos números a y b distintos, el primero menor que el segundo, es decir: $a < b$. Si sumamos un número c a a y a b, ¿en qué orden están los números $a + c$ y $b + c$? En este: $a + c < b + c$. Y lo mismo ocurre si, en vez de sumar, restamos: los números $a - c$ y $b - c$ verifican: $a - c < b - c$.

El resultado análogo se obtiene para desigualdades con el signo '$>$'. Es decir, si a es mayor que b: $a > b$, al sumar un número c tanto a a como a b obtenemos: $a + c > b + c$, y al restarlo: $a - c > b - c$.

Lo dicho en los párrafos precedentes se puede resumir así:

> El sentido de una desigualdad no varía si se suma, o resta, un mismo número a ambos miembros de la desigualdad.

Diremos que las desigualdades $a < b$ y $a + c < b + c$ son *equivalentes*, y escribiremos:

$$a < b \iff a + c < b + c.$$

Obsérvese que, a partir de la primera desigualdad: $a < b$, podemos deducir la segunda: $a+c < b+c$, sumando c a ambos miembros; y también: a partir de la segunda podemos deducir la primera, restando c a ambos miembros. Escribiremos también las siguientes equivalencias:

$$a < b \iff a - c < b - c,$$
$$a > b \iff a + c > b + c, \qquad a > b \iff a - c > b - c.$$

Dados dos números distintos a y b, una forma de encontrar el mayor de los dos es mediante el estudio de la diferencia $b - a$: si ésta es un número positivo, entonces $a < b$ y el número mayor es b; si la diferencia es un número negativo, entonces $a > b$: el número mayor es a. Esto es así porque, de acuerdo con la propiedad anterior, escribir $a < b$ es lo mismo que escribir $a - a < b - a$, o bien: $0 < b - a$; en símbolos:

$$a < b \iff 0 < b - a.$$

Y análogamente: $a > b \Leftrightarrow 0 > b - a$.

Por ejemplo, entre los números $a = -3$ y $b = -5/3$, ¿cuál es mayor? Se tiene:

$$b - a = -\frac{5}{3} - (-3) = -\frac{5}{3} + 3 = \frac{4}{3};$$

como el número $b - a = 4/3$ es positivo, el mayor de los dos números dados es $b = -5/3$.

Después de ver qué ocurre cuando sumamos (o restamos) un mismo número a ambos miembros de una desigualdad, nos preguntamos: ¿qué ocurre cuando ambos miembros se multiplican o dividen por un mismo número no nulo? Es decir, si $a < b$ y c es no nulo, ¿en qué orden están los números ac y bc?, ¿y a/c y b/c? El resultado depende del signo del número c:

$$\text{si } c > 0, \text{ entonces:} \quad ac < bc \quad \text{y} \quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c};$$

$$\text{si } c < 0, \text{ entonces:} \quad ac > bc \quad \text{y} \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c}.$$

Y lo análogo hubiera ocurrido si hubiésemos partido de $a > b$: hubiéramos llegado a $ac > bc$ o a $ac < bc$ según fuera el número c positivo o negativo, respectivamente, y lo mismo tras dividir ambos miembros por c. Podemos resumir todo de esta forma:

> Tras multiplicar, o dividir, ambos miembros de una desigualdad por un mismo número (no nulo), el sentido de la desigualdad no varía si tal número es positivo, y este sentido cambia (es decir, pasa de ser ‘$<$’ a ser ‘$>$’, o viceversa) si tal número es negativo.

Escribiremos:

$$\text{si } c > 0: \quad a < b \Leftrightarrow ac < bc \quad \text{y} \quad a < b \Leftrightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c};$$

$$\text{si } c < 0: \quad a < b \Leftrightarrow ac > bc \quad \text{y} \quad a < b \Leftrightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}.$$

3. Comparación de opuestos. Si multiplicamos ambos miembros de la desigualdad $a < b$ por el número -1, que es negativo, entonces, y de acuerdo con lo explicado en el apartado anterior, el sentido de la desigualdad cambia: $-a > -b$. De manera similar, si partimos de $a > b$, obtenemos: $-a < -b$.

> Los *opuestos* de dos números están ordenados en el orden contrario que los dos números. Es decir, dados dos números a y b, se tiene:
>
> $$a < b \iff -a > -b,$$
> $$a > b \iff -a < -b.$$

Esta propiedad puede ser útil para ordenar números negativos. Por ejemplo, para escribir de menor a mayor los números -1, -5 y -2, podemos ordenar primero de *mayor a menor* sus opuestos: $5 > 2 > 1$; cambiando de signo estos últimos números escritos, sin olvidarnos de cambiar el sentido de las desigualdades, obtenemos:

$$-5 < -2 < -1,$$

que son los números originales ya ordenados de menor a mayor.

4. Comparación de inversos. Si a y b son dos números *positivos*, el primero menor que el segundo: $a < b$, dividiendo ambos miembros por el número positivo ab —lo que conserva el sentido de la desigualdad—, obtenemos:

$$\frac{a}{ab} < \frac{b}{ab} \quad \text{o bien} \quad \frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

> Los *inversos* de dos números *positivos* están ordenados en el orden contrario que los dos números. Es decir, dados dos números positivos a y b, se tiene:
>
> $$a < b \iff \frac{1}{a} > \frac{1}{b},$$
> $$a > b \iff \frac{1}{a} < \frac{1}{b}.$$

Como ejemplo de aplicación de esta propiedad, escribamos en orden creciente los números siguientes: $1/2$, $1/3$, $2/5$ y $2/3$. Sus inversos: 2, 3, $5/2$ y $3/2$, respectivamente, son fáciles de escribir en orden *decreciente*:

$$3, \quad \frac{5}{2}, \quad 2, \quad \frac{3}{2}.$$

Ahora, los inversos de estos últimos números escritos, y en el mismo orden en el que figuran, son precisamente los números originales ya escritos en orden creciente:

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}.$$

5. Comparación de números en escritura decimal. Si dos números (distintos) están expresados en escritura decimal, en *primer lugar* atendemos a su parte entera para ordenarlos: de los dos números será el menor el que tenga la parte entera menor, independientemente de la parte decimal.

Por ejemplo, entre los números 122,88 y 121,99 es menor el segundo, pues su parte entera es menor que la parte entera del otro: $121 < 122$. Es decir: $121{,}99 < 122{,}88$.

Otro ejemplo: entre los números $a = -65{,}3$ y $b = -64{,}2$, ¿cuál es menor? Los opuestos de estos números son: $-a = 65{,}3$ y $-b = 64{,}2$, y están en este orden: $-a > -b$, pues la parte entera de $-a$ es mayor que la de $-b$: $65 > 64$. Concluimos (cf. apartado 3, p. 22) que a es menor que b: $-65{,}3 < -64{,}2$.

Y otro ejemplo más: ¿en qué orden están los números $a = -0{,}999$ y $b = 0{,}001$? En este caso basta observar que uno de los números es negativo y el otro positivo: $a < 0 < b$, con lo cual: $a < b$. Nótese que estos dos números no tienen la misma parte entera: la de a es -1, y la de b es 0; la comparación de la parte entera nos hubiera llevado, por supuesto, al mismo resultado.

En *segundo lugar*, si los números que hay que ordenar tienen la misma parte entera, nos debemos atener a la parte decimal; en concreto, debemos fijarnos en el primer decimal que sea distinto en ambos números (empezando a mirar desde la cifra de las décimas; luego la de las centésimas, la de las milésimas, etc).

Por ejemplo, los números 110,354 y 110,3499 tienen la misma parte entera, así que debemos buscar el primer decimal que tengan distinto. La cifra de las décimas es la misma: 3, pero ya la de las centésimas es distinta: 5 y 4, respectivamente. ¿Qué número es menor? Como ambos números son positivos, es menor el que tiene la cifra menor, es decir, es menor el segundo: $110{,}3499 < 110{,}354$.

Otro ejemplo, con los números $-0{,}001$ y $-0{,}00099$. Como ambos números son negativos, es más cómodo trabajar con los opuestos: 0,001 y 0,00099. Al comparar éstos obtenemos: $0{,}00099 < 0{,}001$ (la primera cifra decimal que tienen distinta es la de las milésimas y es menor la de 0,00099 que la de 0,001). En consecuencia: $-0{,}001 < -0{,}00099$.

6. Comparación de números en escritura fraccionaria. Si a, b, c y d son números enteros positivos, entonces:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \text{es equivalente a} \quad ad < bc;$$

en símbolos: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc$.

Comprobar el resultado anterior es sencillo: como el número bd es positivo, son equivalentes las desigualdades siguientes:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \text{y} \quad \frac{a}{b}(bd) < \frac{c}{d}(bd);$$

y la última es exactamente esta: $ad < bc$.

Por ejemplo, se tiene:

$$\frac{1}{3} < \frac{2}{5},$$

pues: $1 \cdot 5 < 3 \cdot 2$.

Otro ejemplo. Sin utilizar calculadora, determinemos el mayor de los dos números siguientes:

$$A = \frac{876.543.210}{876.543.211} \quad \text{y} \quad B = \frac{876.543.211}{876.543.212}.$$

Denotemos por t el número 876.543.211. Entonces: $t - 1 = 876.543.210$ y $t + 1 = 876.543.212$, y podemos escribir: $A = (t-1)/t$ y $B = t/(t+1)$, de donde:

$$A - 1 = -\frac{1}{t} \quad \text{y} \quad B - 1 = -\frac{1}{t+1}. \tag{1}$$

De la desigualdad $t < t + 1$ se deduce:

$$\frac{1}{t} > \frac{1}{t+1}, \quad \text{y} \quad -\frac{1}{t} < -\frac{1}{t+1};$$

sumando 1 a cada miembro de la última desigualdad, se obtiene:

$$1 - \frac{1}{t} < 1 - \frac{1}{t+1},$$

y con (1) se concluye: $A < B$.

7. Ejercicios. **7.1** Determinar el mayor entre los números decimales 256,32419 y 256,3258.

7.2 Escribir en orden creciente los números siguientes:

$$-2{,}001, \ -2{,}01, \ -2{,}202, \ -2{,}2021, \ -2{,}011, \ -2{,}221 \ \text{y} \ -2{,}0011.$$

7.3 Escribir todos los números enteros positivos que verifiquen que su opuesto es mayor que $-4{,}1$.

7.4 Escribir todos los números enteros cuyo inverso sea mayor que 0,2.

7.5 Señalar en la lista que sigue los números menores que $-4/7$:

$$-\frac{5}{7}, \quad -\frac{4}{8}, \quad -\frac{9}{13}, \quad -\frac{10}{14}, \quad -\frac{4}{7 \cdot 10^{-4}}.$$

7.6 Encontrar el mayor y el menor de los números siguientes:

$$-2, \quad -\frac{17}{8}, \quad -\frac{32}{15}, \quad -\frac{49}{25} \quad \text{y} \quad -\frac{17}{9}.$$

7.7 Encontrar algún número entero a que verifique:

$$\frac{4}{5} < \frac{a}{17} < 1.$$

7.8 Encontrar un número entero a que verifique:

$$\frac{5}{6} < \frac{6}{a} < \frac{7}{8}.$$

7.9 Si a y b son dos números tales que $0 < a < b$, comparar los números siguientes: $(a+1)/a$ y $(b+1)/b$.

7.10 Dados dos números a y b *negativos*, comprobar se verifica lo siguiente:

$$\text{si } a < b, \text{ entonces } \frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

7.11 Dados cuatro números a, b, c y d, demostrar se verifica:

$$\text{si } a < b \text{ y } c < d, \text{ entonces } a + c < b + d.$$

Si los cuatro números a, b, c y d son además *positivos*, demostrar que también se verifica: si $a < b$ y $c < d$, entonces $ac < bd$.

7.12 Encontrar tres números enteros positivos y distintos a, b y c tales que:

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}. \tag{2}$$

Solución de los ejercicios del apartado 7 (p. 26). **7.1** La parte entera en ambos números es la misma, así que nos fijamos en la parte decimal. La primera cifra decimal que en ellos difiere es la de las milésimas: 4 en uno y 5 en otro. Resulta: $256{,}32419 < 256{,}3258$.

7.2 Tras escribir en orden decreciente los opuestos:

$$2{,}221 > 2{,}2021 > 2{,}202 > 2{,}011 > 2{,}01 > 2{,}0011 > 2{,}001,$$

se obtiene:

$$-2{,}221 < -2{,}2021 < -2{,}202 < -2{,}011 < -2{,}01 < -2{,}0011 < -2{,}001.$$

7.3 Si A es un número entero positivo cuyo opuesto: $-A$, es mayor que $-4{,}1$, es decir: $-4{,}1 < -A$, entonces (cf. apartado 3, p. 22): $A < 4{,}1$. Los números enteros positivos cuyo opuesto es mayor que $-4{,}1$ son, pues, los números enteros positivos menores que 4,1; éstos son: 1, 2, 3 y 4.

7.4 El inverso de un número negativo es también un número negativo (cf. apartado 1, p. 20), y un número negativo es menor que 0,2. Por otro lado, el número 0 no tiene inverso. En consecuencia, un número que verifique la condición del enunciado ha de ser positivo.

Ahora, si A es un número entero positivo cuyo inverso: $1/A$, es mayor que 0,2, es decir:

$$\frac{1}{A} > 0{,}2,$$

entonces (cf. apartado 4, p. 23): $A < 1/0{,}2$, o bien: $A < 5$. Los números buscados son, pues, los números enteros positivos menores que 5, que son: 1, 2, 3 y 4.

7.5 De acuerdo con lo visto en el apartado 3 (cf. p. 22), los números menores que $-4/7$ en la lista del enunciado son los opuestos de los números mayores que $4/7$ en la lista siguiente:

$$\frac{5}{7}, \quad \frac{4}{8}, \quad \frac{9}{13}, \quad \frac{10}{14}, \quad \frac{4}{7 \cdot 10^{-4}}.$$

Se tiene:

$$\frac{4}{7} < \frac{5}{7}, \qquad \frac{4}{7} > \frac{4}{8}, \qquad \frac{4}{7} < \frac{9}{13}, \qquad \frac{4}{7} < \frac{10}{14} \qquad \text{y} \qquad \frac{4}{7} < \frac{4}{7 \cdot 10^{-4}},$$

pues:

$$4 \cdot 7 < 7 \cdot 5, \quad 4 \cdot 8 > 7 \cdot 4, \quad 4 \cdot 13 < 7 \cdot 9, \quad 4 \cdot 14 < 7 \cdot 10, \quad 4 \cdot (7 \cdot 10^{-4}) < 7 \cdot 4,$$

respectivamente. En consecuencia, los números menores que $-4/7$ entre los dados son:

$$-\frac{5}{7}, \quad -\frac{9}{13}, \quad -\frac{10}{14} \quad \text{y} \quad -\frac{4}{7 \cdot 10^{-4}}.$$

7.6 El mayor y el menor de los números dados son, respectivamente, el opuesto del menor y el opuesto del mayor entre los números siguientes:

$$2, \quad \frac{17}{8}, \quad \frac{32}{15}, \quad \frac{49}{25} \quad \text{y} \quad \frac{17}{9}.$$

Tras comparar el número 2 con el número $17/8$, y éste con el $32/15$, podemos escribir:

$$2 < \frac{17}{8} < \frac{32}{15},$$

pues $2 \cdot 8 < 17$ y $17 \cdot 15 < 8 \cdot 32$. Por otra parte, análogamente se comprueba:

$$2 > \frac{49}{25} > \frac{17}{9}.$$

En conclusión:

$$\frac{32}{15} > \frac{17}{8} > 2 > \frac{49}{25} > \frac{17}{9}.$$

Entre los números dados en el enunciado, el mayor es $-17/9$, y el menor es $-32/15$.

7.7 La doble desigualdad del enunciado es equivalente a las dos siguientes desigualdades:

$$\frac{4}{5} < \frac{a}{17} \quad \text{y} \quad \frac{a}{17} < 1.$$

La primera se verifica precisamente si: $4 \cdot 17 < 5 \cdot a$, o bien: $68 < 5a$; esta desigualdad es a su vez equivalente a:

$$\frac{68}{5} < a,$$

obtenida al dividir ambos miembros por el número positivo 5. Y la segunda desigualdad se verifica precisamente si: $a < 17$.

¿Para qué valores *enteros* de a se verifican simultáneamente las desigualdades $a > 68/5$ y $a < 17$? Sólo para estos: $a = 14$, $a = 15$ y $a = 16$ (nótese que $68/5 = 13{,}6$).

7.8 Procediendo como en el ejercicio 7.7, obtenemos que las dos desigualdades del enunciado son respectivamente equivalentes a:

$$a < \frac{36}{5} \quad \text{y} \quad a > \frac{48}{7}.$$

En conclusión: $a = 7$.

7.9 Pongamos: $A = (a+1)/a$ y $B = (b+1)/b$. Entonces:

$$A = 1 + \frac{1}{a} \quad \text{y} \quad B = 1 + \frac{1}{b}.$$

El enunciado establece que los números a y b son positivos y verifican la desigualdad $a < b$; ésta es equivalente a:

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{a},$$

y sumando 1 a ambos miembros:

$$1 + \frac{1}{b} < 1 + \frac{1}{a},$$

es decir: $B < A$.

7.10 Como a y b son negativos, sus opuestos: $-a$ y $-b$, son positivos, y se tiene la siguiente cadena de equivalencias:

$$a < b \iff -a > -b \iff \frac{1}{-a} < \frac{1}{-b} \iff \frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

En particular, si $a < b$, entonces $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

7.11 De la desigualdad $a < b$, sumando c a ambos miembros, obtenemos esta otra: $a + c < b + c$; y de la desigualdad $c < d$, sumando b a ambos miembros, obtenemos: $b + c < b + d$. Por tanto: $a + c < b + c < b + d$, y así: $a + c < b + d$.

Por otra parte, siendo positivos los cuatro números dados, de la desigualdad $a < b$ se deduce (multiplicando ambos miembros por c): $ac < bc$, y de $c < d$ se deduce (multiplicando ambos miembros por b): $bc < bd$; luego: $ac < bd$.

Nótese que de las desigualdades $a < b$ y $c < d$ no podemos deducir que $a - c$ sea menor que $b - d$, ni que a/c sea menor que b/d, aun siendo todos positivos. Por ejemplo: $1 < 2$ y $0 < 10$, pero $1 - 0$ no es menor que $2 - 10$; y $1 < 6$ y $2 < 18$, pero $1/2$ no es menor que $6/18$.

7.12 Supongamos que $a < b < c$. Observemos que:

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}.$$

Si a fuera mayor o igual que 3, entonces su inverso: $1/a$, sería menor o igual que $1/3$; también se tendría: $b > 3$ y $c > 3$, y por tanto:

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad \frac{1}{c} < \frac{1}{3}.$$

En consecuencia, se verificaría:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1,$$

y no se cumpliría (2).

Analicemos, pues, el caso $a < 3$; es decir: $a = 2$ (el caso $a = 1$ no es posible, pues requeriría encontrar dos números b y c, enteros positivos, cuyos inversos sumaran 0). Se tiene:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \quad \text{o bien} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Observemos que:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}.$$

Si fuera b mayor o igual que 4, entonces $1/b$ sería menor o igual que $1/4$; también, c sería mayor que 4, y $1/c$ sería menor que $1/4$; se verificaría:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

en contra de que $1/b$ y $1/c$ deben sumar $1/2$. Debe ser, pues, $b < 4$, y por tanto: $b = 3$; así:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{c},$$

de donde: $c = 6$. La solución es única:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

4. POTENCIAS

1. La notación a^n**.** El producto de un número por sí mismo varias veces admite una escritura abreviada utilizando las *potencias*. La definición es la siguiente:

DEFINICIÓN

Sea a un número cualquiera y sea $n \geqslant 1$ un número natural. Se define:

- la **potencia** de **base** a y **exponente** n, que se escribe: a^n, y se lee: "a elevado a n", es el producto de n factores iguales a a, es decir:

$$a^n = \underbrace{aa \cdots a}_{n \text{ factores}};$$

- para $a \neq 0$: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, y se conviene en: $a^0 = 1$.

Nótese que, en particular, se tiene:

$$a^1 = a \quad \text{y} \quad a^{-1} = \frac{1}{a}.$$

Acabamos de definir, pues, las potencias de base un número cualquiera y exponente un número entero. La potencia de base a y exponente 2, es decir: a^2, recibe el nombre particular de **cuadrado** de a; y la de exponente 3, esto es: a^3, el de **cubo** de a.

Por ejemplo, la potencia 3^2 designa el producto de *dos* factores iguales a 3:

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9,$$

y decimos: el *cuadrado* del número 3 es igual a 9. La potencia $(-2)^3$ denota el producto del número -2 por sí mismo tres veces:

$$(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8,$$

y decimos: el *cubo* del número -2 es igual a -8.

Otra ejemplo de potencia, esta vez con exponente negativo, es: 5^{-4}; designa el inverso de 5^4, esto es:

$$5^{-4} = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{625}.$$

Otro ejemplo más:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = \frac{1}{(1/2)^5} = \frac{1}{(1/2)(1/2)(1/2)(1/2)(1/2)} = \frac{1}{1/32} = 32.$$

Y, finalmente, debemos insistir en lo siguiente: $a^0 = 1$ cualquiera que sea el número a *no nulo*.

2. Reglas de cálculo de potencias. Las potencias verifican las siguientes propiedades:

Para cualquier número a *no nulo* y cualesquiera números enteros p y q, se tiene:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}, \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}, \quad (a^p)^q = a^{pq}.$$

Y para cualesquiera números a y b *no nulos* y cualquier número entero p, se tiene:

$$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}.$$

Como un caso particular de estas propiedades, se tiene:

$$a^p \cdot a = a^{p+1} \quad \text{y} \quad \frac{a^p}{a} = a^{p-1},$$

Nota bene. En el enunciado de las propiedades anteriores, hemos exigido que a y b sean no nulos. De esta forma, tienen sentido las potencias a^p, a^q y b^q en el caso en que los exponentes p y q sean negativos. △

Como ejemplo, tratemos, con la ayuda de estas propiedades, de escribir de la forma más simple posible las siguientes expresiones (donde a y b son números no nulos):

$$a^5a^{-4}, \quad \frac{(a^4)^3a}{a^{-2}} \quad \text{y} \quad \frac{(a^3b^{-2})^4}{ab^2}.$$

Para la primera, se tiene:

$$a^5a^{-4} = a^{5+(-4)} = a^1 = a;$$

para la segunda:

$$\frac{(a^4)^3a}{a^{-2}} = \frac{a^{4\cdot 3}a}{a^{-2}} = \frac{a^{12+1}}{a^{-2}} = \frac{a^{13}}{a^{-2}} = a^{13-(-2)} = a^{15};$$

y finalmente:

$$\frac{(a^3b^{-2})^4}{ab^2} = \frac{(a^3)^4(b^{-2})^4}{ab^2} = \frac{a^{12}b^{-8}}{ab^2} = a^{12-1}b^{-8-2} = a^{11}b^{-10} = \frac{a^{11}}{b^{10}}.$$

3. Ejercicios. Escribir de la forma más simple posible (a y b son números no nulos; p, un número entero):

3.1 $(-1)^4$;

3.2 $(-1)^{-3}$;

3.3 $(-1)^p$;

3.4 a^3a^{-5};

3.5 $\dfrac{a^4}{a^3}$;

3.6 $\dfrac{a^3b^2}{a^4b^3}$;

3.7 $(a^3b^2)^4$;

3.8 $\left(\dfrac{b}{a}\right)^4 \cdot \dfrac{a^4}{b^3}$;

3.9 $\dfrac{(a^2b)^2}{a^5b^2}$;

3.10 $\dfrac{(a^3b^3)^2 \cdot (a^5b)^3}{a^7 \cdot (a^2b^3)^5 \cdot b}$;

3.11 $(1{,}5)^2$;

3.12 $\left(\dfrac{-2}{5}\right)^{-3}$.

3.13 Si a es un número *positivo* y p es un número entero, ¿cuál es el signo de la potencia a^p?

3.14 Si a es un número *negativo* y p es un número entero, ¿cuál es el signo de la potencia a^p? (Estudiar este signo según la paridad del exponente p, es decir, según sea par o impar.)

3.15 Demostrar que dos números con el mismo cuadrado son iguales u opuestos. Es decir, probar que si a y b son dos números tales que $a^2 = b^2$, entonces $a = b$ o $a = -b$.

4. Potencias y desigualdades. Los cuadrados de dos números *positivos* están en el mismo orden que los números. Es decir, si a y b son dos números positivos, se tiene: $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$.

El resultado anterior es consecuencia de la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned} a < b \iff b - a > 0 &\iff (b+a)(b-a) > 0 \\ &\iff b^2 - a^2 > 0 \iff a^2 < b^2. \end{aligned}$$

Nótese, para justificar la segunda equivalencia, que el número $b + a$ es positivo (al serlo a y b); también, hemos hecho uso de la identidad notable para la diferencia de dos cuadrados: $b^2 - a^2 = (b + a)(b - a)$.

Nos preguntamos ahora lo siguiente: ¿qué números positivos son mayores que su cuadrado? O bien: ¿qué números a verifican: $a > 0$ y $a > a^2$? Dividiendo ambos miembros de la desigualdad $a > a^2$ por el número positivo a, se obtiene:

$$\frac{a}{a} > \frac{a^2}{a} \quad \text{es decir: } a < 1.$$

Análogamente se probaría que los números positivos que son menores que su cuadrado son los mayores que 1.

Finalmente, ¿qué números positivos son iguales a su cuadrado? Es decir, ¿qué números $a > 0$ son tales que $a = a^2$? Dividiendo por el número positivo a ambos miembros de la igualdad $a = a^2$, obtenemos: $a = 1$.

En conclusión, si a es un número positivo, podemos escribir:

$$a > a^2 \text{ para } 0 < a < 1, \quad a = a^2 \text{ para } a = 1, \quad a < a^2 \text{ para } a > 1.$$

(Nótese que la igualdad $a = a^2$ también es verificada por $a = 0$.)

5. La notación a^{p^q}***.*** Cuando se escribe a^{p^q}, ¿qué se quiere decir: $(a^p)^q$ o $a^{(p^q)}$? Lo segundo. Lo concretamos en el siguiente cuadro.

Sean a un número real no nulo, p un número entero no nulo y q un número natural. Si $p^q = l$, se define:

$$a^{p^q} = a^l.$$

Por ejemplo:

$$2^{3^2} = 2^9 = 512, \quad 2^{(-2)^2} = 2^4 = 16.$$

Nota bene. No debe confundirse a^{p^q} con $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$. No obstante, ambas expresiones pueden tener el mismo valor; por ejemplo, cuando p^q es igual a $p \cdot q$. △

6. Notación científica de un número decimal. Es habitual presentar los números decimales en su *notación científica*; así suelen hacerlo, por ejemplo, las calculadoras, sobre todo cuando el número tiene muchas cifras. El principio es el siguiente: un número decimal no nulo está escrito en notación científica si puede expresarse de la forma: $a \cdot 10^p$, donde a es un número decimal que tiene una sola cifra, *no nula*, delante de la coma, y p es un número entero. (El número a es, pues, un número cuya parte entera tiene una sola cifra, y no nula.)

Por ejemplo, escribamos en notación científica el número 0,0065. Al multiplicar y dividir este número por 1.000, obtenemos:

$$0{,}0065 = \frac{0{,}0065 \cdot 1.000}{1.000} = \frac{6{,}5}{1.000} = \frac{6{,}5}{10^3} = 6{,}5 \cdot 10^{-3}.$$

La igualdad obtenida: $0{,}0065 = 6{,}5 \cdot 10^{-3}$, expresa el número 0,0065 como producto de un número decimal que tiene una sola cifra no nula antes de la coma: 6,5, y una potencia de 10: 10^{-3}. La notación científica de 0,0065 es: $6{,}5 \cdot 10^{-3}$.

7. Ejercicios. Escribir en notación científica los siguientes números:

7.1 $0{,}32 \cdot 10^4$;

7.2 250.000;

7.3 $39 \cdot 10^{-9}$;

7.4 $-14{,}41$;

7.5 $2.200 \cdot 30.000$;

7.6 $5.000 \cdot 0{,}00005$;

7.7 $0{,}00003 \cdot 0{,}0000016$;

7.8 $\dfrac{42.000}{0{,}00003}$;

7.9 $-0{,}32 \cdot 10^{-4}$.

Solución de los ejercicios del apartado 3 (p. 33). Se tiene:

3.1 $(-1)^4 = (-1)(-1)(-1)(-1) = 1$;

3.2 $(-1)^{-3} = \dfrac{1}{(-1)^3} = \dfrac{1}{-1} = -1$;

3.3 $(-1)^p$ es igual a 1 si p es par o nulo, y es igual a -1 si p es impar;

3.4 $a^3a^{-5} = a^{3+(-5)} = a^{-2} = \dfrac{1}{a^2}$;

3.5 $\dfrac{a^4}{a^3} = a^{4-3} = a$;

3.6 $\dfrac{a^3b^2}{a^4b^3} = a^{-1}b^{-1} = \dfrac{1}{ab}$;

3.7 $(a^3b^2)^4 = (a^3)^4(b^2)^4 = a^{12}b^8$;

3.8 $\left(\dfrac{b}{a}\right)^4 \cdot \dfrac{a^4}{b^3} = \dfrac{b^4a^4}{a^4b^3} = b$;

3.9 $\dfrac{(a^2b)^2}{a^5b^2} = \dfrac{a^4b^2}{a^5b^2} = \dfrac{1}{a}$;

3.10 $\dfrac{(a^3b^3)^2 \cdot (a^5b)^3}{a^7 \cdot (a^2b^3)^5 \cdot b} = \dfrac{(a^6b^6) \cdot (a^{15}b^3)}{a^7 \cdot (a^{10}b^{15}) \cdot b} = \dfrac{a^{21}b^9}{a^{17}b^{16}} = \dfrac{a^4}{b^7}$;

3.11 $(1{,}5)^2 = 1{,}5 \cdot 1{,}5 = 2{,}25$;

3.12 $\left(\dfrac{-2}{5}\right)^{-3} = \dfrac{1}{(-2/5)^3} = \dfrac{1}{-8/125} = -\dfrac{125}{8}$.

3.13 Si $p = 0$, entonces $a^p = a^0 = 1$, que es un número positivo. Si p es positivo, la potencia a^p es el producto de p números positivos, y por tanto un número positivo. Si p es negativo, la potencia a^p es el inverso de un número positivo: $a^p = 1/a^{-p}$, y en consecuencia también es positivo.

En conclusión, cuando la base a es un número positivo, la potencia a^p también es un número positivo, cualquiera que sea el exponente entero p.

3.14 Podemos escribir: $a = (-1)(-a)$, de donde:

$$a^p = \big((-1)(-a)\big)^p = (-1)^p(-a)^p.$$

Al ser a negativo, el número $-a$ es positivo, y también lo es la potencia $(-a)^p$ (cf. ejercicio 3.13). El signo de a^p es, pues, el mismo que el de $(-1)^p$: positivo si p es par o nulo, negativo si p es impar (cf. ejercicio 3.3).

3.15 Podemos escribir la siguiente cadena de equivalencias:

$$a^2 = b^2 \iff a^2 - b^2 = 0 \iff (a+b)(a-b) = 0$$
$$\iff \begin{cases} a+b=0 \\ \text{o} \\ a-b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-b \\ \text{o} \\ a=b. \end{cases}$$

Si los números a y b tienen el mismo cuadrado, o bien son iguales, o bien son opuestos.

Solución de los ejercicios del apartado 7 (p. 35). Escribimos sólo el resultado:

7.1 $3{,}2 \cdot 10^3$;

7.2 $2{,}5 \cdot 10^5$;

7.3 $3{,}9 \cdot 10^{-8}$;

7.4 $-1{,}441 \cdot 10$;

7.5 $6{,}6 \cdot 10^7$;

7.6 $2{,}5 \cdot 10^{-1}$;

7.7 $4{,}8 \cdot 10^{-11}$;

7.8 $1{,}4 \cdot 10^9$;

7.9 $-3{,}2 \cdot 10^{-5}$.

5. RAÍCES CUADRADAS

1. La notación $\sqrt{a}$. La notación $\sqrt{a}$ sólo tiene sentido cuando a es un número positivo o el número 0. Designa el único número positivo, o nulo en el caso en que $a = 0$, cuyo cuadrado es igual al número a.

Lo concretamos en la siguiente definición:

DEFINICIÓN

Cuando a es un número positivo o nulo, $\sqrt{a}$ representa el *único* número positivo o nulo cuyo cuadrado es igual a a.
El número $\sqrt{a}$ se denomina **raíz cuadrada** de a.
La notación $\sqrt{a}$ no tiene sentido si a es un número negativo.

Es decir, si a es positivo o nulo, entonces la raíz cuadrada de a: $\sqrt{a}$, es un número, también positivo o nulo, tal que su cuadrado es igual a a:

$$\sqrt{a} \geqslant 0 \quad \text{y} \quad \left(\sqrt{a}\,\right)^2 = a;$$

además, $\sqrt{a}$ es el único número con esta propiedad. Dicho de otra forma: para un número positivo o nulo a, escribir "$x = \sqrt{a}$"es lo mismo que escribir "$x \geqslant 0$ y $x^2 = a$":

$$x = \sqrt{a} \iff \begin{cases} x \geqslant 0 \\ \quad \text{y} \\ x^2 = a. \end{cases}$$

En la notación $\sqrt{a}$, el número a recibe el nombre de **radicando**. Insistimos de nuevo en lo siguiente: no tiene sentido escribir una raíz cuadrada cuyo radicando sea un número negativo.

2. Ejemplos de raíces cuadradas. ►**2.1** Como el número 4 es positivo, tiene sentido la notación: $\sqrt{4}$. Podemos afirmar, además, que la raíz cuadrada de 4 es igual a 2. ¿Por qué? Porque el número 2 es positivo y su cuadrado es igual a 4: $2^2 = 4$. Podemos escribir: $\sqrt{4} = 2$.

►**2.2** A pesar de que el cuadrado del número -2 es igual a 4: $(-2)^2 = 4$, no podemos decir que la raíz cuadrada de 4 sea igual a -2. No podemos porque -2 es un número negativo y la raíz cuadrada de un número positivo, como lo es el 4, es *por definición* un número positivo o nulo.

►**2.3** De la definición se deduce inmediatamente que $\sqrt{0} = 0$. Además, el número 0 es el único cuya raíz cuadrada es nula.

►**2.4** Otros ejemplos de raíz cuadrada:

$$\sqrt{16} = 4, \quad \sqrt{225} = 15, \quad \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}.$$

►**2.5** ¿Cuál es la raíz cuadrada del número -4? Esta pregunta no tiene sentido, pues el número -4 es negativo. Y, desde luego, tampoco tiene sentido escribir una raíz cuadrada cuyo radicando sea -4.

3. La ecuación $x^2 = a$. Dado un número a, ¿qué números reales verifican que su cuadrado es igual a a? Dicho de otra forma: ¿qué soluciones tiene la ecuación (en la incógnita x) $x^2 = a$? Estudiemos esta ecuación según sea a positivo, negativo o nulo.

Si a es negativo, la citada ecuación no tiene solución. En efecto: el cuadrado de cualquier número es un número positivo o nulo (es una consecuencia del ejercicio 3.13 y del ejercicio 3.14 de la sección 4, cf. p. 33), luego ningún número real x es tal que su cuadrado es igual al número negativo a.

Por otro lado, si a es nulo: $a = 0$, entonces sólo un número es solución de la ecuación: el número 0.

Finalmente, si $a > 0$, la ecuación tiene dos soluciones: $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$. En efecto. De la ecuación $x^2 = a$, con $a > 0$, ya tenemos al menos una solución: $\sqrt{a}$. Cualquier otro número b que sea solución, es decir: $b^2 = a$, es tal que su cuadrado coincide con el cuadrado de $\sqrt{a}$: $b^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2$; del ejercicio 3.15 de la sección 4 deducimos que los números $\sqrt{a}$ y b han de ser iguales u opuestos. Concluimos que la ecuación $x^2 = a$, con $a > 0$, tiene exactamente dos soluciones: $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$.

Resumimos lo obtenido en el siguiente cuadro:

La ecuación $x^2 = a$ verifica:

- si $a < 0$, no tiene solución;
- si $a = 0$, tiene una única solución: 0;
- si $a > 0$, tiene dos soluciones: $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$.

4. Ejemplos de ecuaciones de la forma $x^2 = a$. **▶4.1** Resolvamos la ecuación $2x^2 + 3 = 0$. En virtud de la cadena de equivalencias siguiente:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3 = 0 \iff (2x^2 + 3) - 3 = 0 - 3 \iff 2x^2 = -3 \\ \iff \frac{1}{2}(2x^2) = \frac{1}{2} \cdot (-3) \iff x^2 = -\frac{3}{2}, \end{aligned}$$

la ecuación dada es *equivalente* a la ecuación $x^2 = -3/2$, es decir, si un número es solución de una, lo es también de la otra, y si una no tiene solución, la otra tampoco.

Ahora bien, la ecuación $x^2 = -3/2$ no admite solución, por ser negativo el número $-3/2$. Recordemos: la ecuación $x^2 = a$ no admite solución cuando $a < 0$. La ecuación original: $2x^2 = 3$, tampoco admite solución.

▶**4.2** Resolvamos ahora la ecuación $(x+1)^2 = 2$. Los números cuyo cuadrado es igual a 2 son: $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$. Por tanto, los números x que verifican $(x+1)^2 = 2$ son los números x que verifican:

$$x + 1 = \sqrt{2} \quad \text{o} \quad x + 1 = -\sqrt{2},$$

o bien: $x = \sqrt{2} - 1$ o $x = -\sqrt{2} - 1$. La ecuación $(x+1)^2 = 2$ admite, pues, dos soluciones: $\sqrt{2} - 1$ y $-\sqrt{2} - 1$.

▶**4.3** Resolvamos las ecuaciones $x^2 = 10^{2n}$ y $x^2 = 10^{-2n}$, donde n es un número natural.

Como 10^{2n} es un número positivo, la primera ecuación admite dos soluciones; precisamente: $\sqrt{10^{2n}}$ y $-\sqrt{10^{2n}}$. Ahora bien, ¿cuál es la raíz cuadrada de 10^{2n}? De acuerdo con lo que sabemos de potencias (cf. sección 4), podemos escribir: $10^{2n} = (10^n)^2$, y así tenemos lo siguiente: el número 10^n es positivo y su cuadrado es igual a 10^{2n}; es decir: $\sqrt{10^{2n}} = 10^n$. Las dos soluciones de la ecuación son: 10^n y -10^n.

La otra ecuación: $x^2 = 10^{-2n}$, también admite dos soluciones, pues el número 10^{-2n} es positivo. Teniendo en cuenta la igualdad $10^{-2n} = (10^{-n})^2$, de forma análoga a como hemos procedido con la otra ecuación concluimos que tales dos soluciones son: 10^{-n} y -10^{-n}.

5. Ejercicios. Resolver las siguientes ecuaciones:

5.1 $x^2 = 0{,}09$;

5.2 $x^2 - 1{,}21 \cdot 10^{-4} = 0$;

5.3 $10x^2 - 10^{-5} = 0$;

5.4 $0{,}2 \cdot x^2 = 0{,}008$;

5.5 $x^2 = 16 \cdot 10^{-4}$;

5.6 $x^2 = (1 - \sqrt{2}\,)^2$;

5.7 $(2x+3)^2 = 16$;

5.8 $x^2 + \sqrt{2} = 0$;

5.9 $x^2 - 3{,}6 \cdot 10^{-3} = 0$;

5.10 $100x^2 = 0$;

5.11 $-\dfrac{x^2}{2} = 3 - \sqrt{10}$.

6. Una propiedad de la raíz cuadrada. La propiedad que enunciamos a continuación nos permitirá simplificar la escritura de algunas expresiones que contienen radicales (es decir, signos de raíz cuadrada).

Si a y b son dos números positivos o nulos, se tiene:

$$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}.$$

Podemos justificar esta propiedad de la siguiente manera. Por un lado, se tiene: $a\sqrt{b} \geqslant 0$; y por otro lado:

$$\left(a\sqrt{b}\,\right)^2 = a^2\left(\sqrt{b}\,\right)^2 = a^2 b.$$

Es decir, el número $a\sqrt{b}$ es positivo o nulo y su cuadrado es igual a a^2b. Dicho de otra forma: el número $a\sqrt{b}$ es la raíz cuadrada de a^2b; en símbolos: $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$.

Como ejemplo de utilización de esta propiedad, se tiene:

$$\sqrt{360} = \sqrt{6^2 \cdot 10} = 6\sqrt{10}.$$

También (aplicando la propiedad dos veces):

$$\sqrt{288} = \sqrt{4^2 \cdot 18} = 4\sqrt{18} = 4\sqrt{3^2 \cdot 2} = 4 \cdot 3\,\sqrt{2} = 12\sqrt{2}.$$

Y en este otro ejemplo simplificamos considerablemente la expresión dada (de tener tres radicales pasa a tener sólo uno):

$$\begin{aligned}
2\sqrt{18} + 3\sqrt{32} + 4\sqrt{50} &= 2\sqrt{3^2 \cdot 2} + 3\sqrt{4^2 \cdot 2} + 4\sqrt{5^2 \cdot 2} \\
&= 2 \cdot 3\,\sqrt{2} + 3 \cdot 4\,\sqrt{2} + 4 \cdot 5\,\sqrt{2} \\
&= 6\sqrt{2} + 12\sqrt{2} + 20\sqrt{2} \\
&= (6 + 12 + 20)\sqrt{2} = 38\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Nótese cómo, en el penúltimo paso, se ha sacado como factor común la raíz $\sqrt{2}$.

7. Reglas de cálculo. La raíz cuadrada de un producto es igual al producto de las raíces cuadradas, y lo mismo acontece con el cociente. Estas propiedades, y otras más, se detallan a continuación.

Sean a y b dos números:

- para $a \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$;
- para $a \geqslant 0$ y $b > 0$: $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$;
- $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, & \text{si } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{si } a < 0; \end{cases}$
- para $a \geqslant 0$ y p un número entero: $\sqrt{a^p} = \left(\sqrt{a}\right)^p$.

Nota bene. La igualdad $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ se verifica sólo para números a y b positivos o nulos, y su análoga con el cociente: $\sqrt{a/b} = \sqrt{a}/\sqrt{b}$, se verifica sólo para a positivo o nulo y b positivo (en particular: $b \neq 0$). △

Estas propiedades permiten simplificar expresiones con radicales, en el sentido de que permiten obtener expresiones iguales a las dadas pero con la menor cantidad posible de ellos. Por ejemplo, consideremos la expresión A dada por:

$$A = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{81}}.$$

Sabemos que se tiene: $36 = 6^2$ y $81 = 9^2$; podemos escribir:

$$A = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{81}} = \frac{\sqrt{6^2}}{\sqrt{9^2}} \cdot \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}} = \frac{6}{9} \cdot \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}},$$

donde hemos hecho uso de esta propiedad: $\sqrt{a^2} = a$ si $a \geqslant 0$. Ahora, como $(54/6) = 9 = 3^2$, teniendo en cuenta la segunda propiedad (sobre la raíz de un cociente), resulta:

$$A = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{54}{6}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{9} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3^2} = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2.$$

Otro ejemplo: simplifiquemos $B = \left(\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right)^2$. Recordemos la igualdad notable para el cuadrado de una diferencia: $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$;

aplicando esta fórmula (tomando $a = \sqrt{2}$ y $b = 2\sqrt{3}$), se tiene:

$$\begin{aligned} B = \left(\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\,\right)^2 &= \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 2\left(\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{3}\right) \\ &= 2 + 4\left(\sqrt{3}\right)^2 - 4\sqrt{2}\sqrt{3} = 2 + 4\cdot 3 - 4\sqrt{6} \\ &= 14 - 4\sqrt{6} \end{aligned}$$

(en la penúltima igualdad estamos considerando la propiedad sobre la raíz cuadrada de un producto). Concluimos: $B = 14 - 4\sqrt{6}$; esta última expresión no se puede simplificar más.

8. Ejercicios. Simplificar lo más posible las siguientes expresiones:

8.1 $\sqrt{(-2)^3 \cdot (-3)}$; **8.2** $2\sqrt{5} - 3\sqrt{20} + 5\sqrt{45}$;

8.3 $\sqrt{2(2\cdot 3)(2\cdot 3\cdot 4)(2\cdot 3\cdot 4\cdot 5)}$; **8.4** $\sqrt{12} - \sqrt{75} + 2\sqrt{48}$;

8.5 $\dfrac{\sqrt{24}\cdot\sqrt{12}}{\sqrt{50}}$; **8.6** $\sqrt{\dfrac{6{,}3}{2{,}8}} \cdot \sqrt{\dfrac{18}{0{,}72}}$;

8.7 $\sqrt{3{,}6}\cdot\sqrt{20} + \sqrt{0{,}0004}$.

9. Raíces cuadradas y desigualdades. Las raíces cuadradas de dos números positivos están en el mismo orden que los números. Esto es, si a y b son dos números positivos, entonces:

$$a < b \iff \sqrt{a} < \sqrt{b}.$$

Este resultado es una consecuencia de lo afirmado en el apartado 4 de la sección 4 (cf. p. 34), pues $\left(\sqrt{a}\,\right)^2 = a$ y $\left(\sqrt{b}\,\right)^2 = b$.

También del contenido del apartado citado se deduce lo siguiente para un número positivo a:

$$a < \sqrt{a} \text{ para } 0 < a < 1, \quad a = \sqrt{a} \text{ para } a = 1, \quad a > \sqrt{a} \text{ para } a > 1.$$

(La igualdad $a = \sqrt{a}$ también es verificada por $a = 0$.)

Como aplicación de lo anterior, consideremos el siguiente problema. Dado el número a siguiente:

$$a = 0{,}\underbrace{999\ldots 99}_{\text{dos mil dos nueves}},$$

¿cuál es, en el número $\sqrt{a}$, la cifra que ocupa el lugar dos mil dos a la derecha de la coma?

El número a es positivo y menor que 1: $0 < a < 1$, luego:

$$0 < \sqrt{a} < \sqrt{1}, \quad \text{es decir: } 0 < \sqrt{a} < 1;$$

pero también: $a < \sqrt{a}$. Esto es: el número $\sqrt{a}$ está comprendido entre a y 1, y es diferente de ambos. Cualquier número, comprendido entre 0 y 1, que a la derecha de la coma tenga alguna de sus primeras dos mil dos cifras distinta de 9 es menor que a, así que la cifra que ocupa el lugar dos mil dos a la derecha de la coma en el número $\sqrt{a}$ debe ser igual a 9.

10. Eliminación de radicales en el denominador. ▶**10.1** Una expresión algebraica que contenga algún radical en un denominador no se considera suficientemente simplificada. Por ejemplo, el cociente $3/\sqrt{7}$ puede simplificarse aún más, en el sentido de que se puede eliminar el radical del denominador. En este caso, lo conseguimos multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{7}$:

$$\frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{7}\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{\left(\sqrt{7}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{7}.$$

La expresión obtenida: $3\sqrt{7}/7$, es igual a la dada, pero no tiene radicales en su denominador.

▶**10.2** Escribamos sin radicales en el denominador el siguiente número:

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}+1}.$$

Recordemos la igualdad notable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ (suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados); si tomamos $a = \sqrt{3}$ y $b = 1$, la expresión A toma la forma:

$$A = \frac{1}{a+b}.$$

Ahora, multipliquemos numerador y denominador por $a - b = \sqrt{3} - 1$ (este número es no nulo); obtenemos:

$$A = \frac{a-b}{(a+b)(a-b)} = \frac{a-b}{a^2-b^2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{3}-1}{3-1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

La última expresión obtenida, igual a la expresión A original, no tiene radicales en su denominador.

¿Cómo hemos procedido? Hemos multiplicado el numerador y el denominador por una expresión conveniente para conseguir eliminar el radical. Diremos que las expresiones $a-b$ y $a+b$ son **conjugadas**. Así, las expresiones $\sqrt{3}-1$ y $\sqrt{3}+1$ son conjugadas. Esta técnica de multiplicar numerador y denominador por el conjugado del denominador es útil a veces para eliminar radicales del denominador.

▶**10.3** Escribamos sin radicales en el denominador el número siguiente:

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}.$$

El conjugado del denominador, es decir, el conjugado del número $2-\sqrt{3}$, es: $2+\sqrt{3}$; multiplicando numerador y denominador por $2+\sqrt{3}$, se obtiene:

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)} = \frac{2+\sqrt{3}}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}.$$

▶**10.4** Simplifiquemos este número:

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}.$$

Si notamos: $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ y $b=\sqrt{5}$, el denominador de B toma la forma: $a+b$. Multiplicando en B numerador y denominador por el conjugado de $a+b$, es decir, por $a-b=\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{a+b} = \frac{a-b}{(a+b)(a-b)} = \frac{a-b}{a^2-b^2} \\
&= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-5} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{2}\sqrt{3}-5} \\
&= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2+3+2\sqrt{2}\sqrt{3}-5} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}.
\end{aligned}$$

Podemos ahora eliminar el radical $\sqrt{6}$ del denominador de la última expresión obtenida, sin más que multiplicar numerador y denominador por $\sqrt{6}$:

$$\begin{aligned} B = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} &= \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\sqrt{6}} \\ &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{6}+\sqrt{3}\sqrt{6}-\sqrt{5}\sqrt{6}}{2\cdot 6} = \frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}}{12}. \end{aligned}$$

Ya no tenemos radicales en el denominador, pero podríamos simplificar un poco más; se tiene: $\sqrt{12} = \sqrt{2^2\cdot 3} = 2\sqrt{3}$, y análogamente: $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Finalmente obtenemos:

$$B = \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}.$$

▶**10.5** Simplifiquemos el número siguiente:

$$C = \frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}.$$

Observemos que se tiene:

$$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 - 2\sqrt{2}\sqrt{3} = 3+2-2\sqrt{6} = 5-2\sqrt{6}.$$

Por tanto:

$$C = \frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}.$$

Ahora, multiplicamos numerador y denominador por el conjugado de éste, que es: $\sqrt{3}+\sqrt{2}$. Resulta:

$$\begin{aligned} C = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}. \end{aligned}$$

En conclusión:

$$\frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}} = \sqrt{2}+\sqrt{3}.$$

Solución de los ejercicios del apartado 5 (p. 40). Proporcionamos el resultado final:

5.1 0,3 y $-0{,}3$; **5.2** $1{,}1\cdot 10^{-2}$ y $-1{,}1\cdot 10^{-2}$;

5.3 10^{-3} y -10^{-3};

5.4 0,2 y $-0{,}2$;

5.5 0,04 y $-0{,}04$;

5.6 $1-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}-1$;

5.7 $\dfrac{1}{2}$ y $-\dfrac{7}{2}$;

5.8 no admite solución;

5.9 0,06 y $-0{,}06$;

5.10 0 (única solución);

5.11 $\sqrt{2(\sqrt{10}-3)}$ y $-\sqrt{2(\sqrt{10}-3)}$; (nótese que $\sqrt{10}-3>0$).

Solución de los ejercicios del apartado 8 (p. 43). **8.1** Se tiene:

$$(-2)^3\cdot(-3)=(-8)\cdot(-3)=24=2^2\cdot 6,$$

de donde: $\sqrt{(-2)^3\cdot(-3)}=\sqrt{2^2\cdot 6}=2\sqrt{6}$.

> **Nota bene.** La propiedad relativa a la raíz cuadrada de un producto: $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, no puede ser aplicada a $\sqrt{(-2)^3\cdot(-3)}$ con los factores $(-2)^3$ y -3, pues éstos *no* son números positivos o nulos. El producto de estos dos números, sin embargo, es positivo, lo que hace que sí tenga sentido escribir su raíz cuadrada. △

8.2 Observemos que $20=2^2\cdot 5$ y $45=3^2\cdot 5$; podemos, pues, extraer como factor común el radical $\sqrt{5}$:

$$\begin{aligned}2\sqrt{5}-3\sqrt{20}+5\sqrt{45}&=2\sqrt{5}-3\sqrt{2^2\cdot 5}+5\sqrt{3^2\cdot 5}\\&=2\sqrt{5}-3\cdot 2\,\sqrt{5}+5\cdot 3\,\sqrt{5}=(2-6+15)\sqrt{5}=11\sqrt{5}.\end{aligned}$$

8.3 Operamos:

$$\begin{aligned}\sqrt{2(2\cdot 3)(2\cdot 3\cdot 4)(2\cdot 3\cdot 4\cdot 5)}&=\sqrt{2^4\cdot 3^3\cdot 4^2\cdot 5}\\&=2^2\sqrt{3^2\cdot 3\cdot 4^2\cdot 5}\\&=2^2\cdot 3\,\sqrt{3\cdot 4^2\cdot 5}=2^2\cdot 3\cdot 4\,\sqrt{3\cdot 5}=48\sqrt{15}.\end{aligned}$$

8.4 Podemos extraer como factor común el radical $\sqrt{3}$:

$$\sqrt{12}-\sqrt{75}+2\sqrt{48}=2\sqrt{3}-5\sqrt{3}+2\cdot 4\,\sqrt{3}=5\sqrt{3}.$$

8.5 Se tiene:

$$\frac{\sqrt{24}\cdot\sqrt{12}}{\sqrt{50}}=\sqrt{\frac{24\cdot 12}{50}}=\sqrt{\frac{2^3\cdot 3\cdot 2^2\cdot 3}{5^2\cdot 2}}=\sqrt{\frac{2^4\cdot 3^2}{5^2}}=\frac{2^2\cdot 3}{5}=\frac{12}{5}.$$

8.6 Observemos se verifica:

$$6{,}3 = \frac{9 \cdot 7}{10}, \quad 2{,}8 = \frac{7 \cdot 4}{10} \quad \text{y} \quad 0{,}72 = \frac{18 \cdot 4}{100},$$

de donde:

$$\sqrt{\frac{6{,}3}{2{,}8}} \cdot \sqrt{\frac{18}{0{,}72}} = \sqrt{\frac{6{,}3 \cdot 18}{2{,}8 \cdot 0{,}72}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 18 \cdot 100}{7 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 18 \cdot 4}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 100}{4 \cdot 4}} = \frac{3 \cdot 10}{4} = \frac{15}{2}.$$

8.7 Se tiene: $\sqrt{3{,}6} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{3{,}6 \cdot 20} = \sqrt{6^2 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$, y también:

$$\sqrt{0{,}0004} = \sqrt{4 \cdot 10^{-4}} = 2 \cdot 10^{-2},$$

de donde: $\sqrt{3{,}6} \cdot \sqrt{20} + \sqrt{0{,}0004} = 6\sqrt{2} + 2 \cdot 10^{-2}$.