

Capítulo 1

CAMPO ELÉCTRICO I

1.1. INTRODUCCIÓN

En este apartado introduciremos las definiciones y expresiones más importantes que se utilizarán en los problemas que se proponen y resuelven en este capítulo.

1.1.1 CARGA ELÉCTRICA

La carga eléctrica es un atributo de las partículas elementales que la poseen caracterizado por la fuerza electrostática que entre ellas se ejerce. Dicha fuerza es atractiva si las cargas respectivas son de signo contrario, y repulsiva si son del mismo signo.

En el sistema internacional SI la unidad de carga es el culombio.

La carga libre más pequeña que se conoce es la correspondiente al electrón $e = 1,60 \times 10^{-19}$ culombios [C].

1.1.2 DISTRIBUCIONES DE CARGA ELÉCTRICA

Las distribuciones de carga puntuales se caracterizan por que suponemos la carga concentrada en el punto donde está situada cada una de las cargas que componen la distribución.

1.1.3 DISTRIBUCIONES CONTINUAS

Son aglomerados de carga que desde un punto de vista macroscópico pueden ser caracterizados por densidades de carga. Se definen las densidades por la relación entre la suma de todas las cargas que hay en un volumen, superficie o longitud elemental y dicho volumen, superficie o longitud.

Densidad volumétrica de carga ρ

$$\rho = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} \tag{1.1}$$

Densidad superficial σ o ρ_s

$$\sigma = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} \tag{1.2}$$

Densidad lineal λ

$$\lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} \tag{1.3}$$

1.1.4 LEY DE COULOMB

La ley de Coulomb establece que la fuerza entre dos cargas puntuales, es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, cuya dirección es la de la recta que une las cargas y el sentido depende de los respectivos signos, de atracción si son de signo opuesto y de repulsión si son del mismo signo.

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad [\text{N}] \tag{1.4}$$

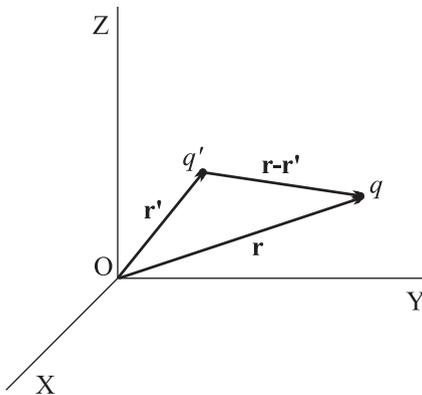


Figura 1.1

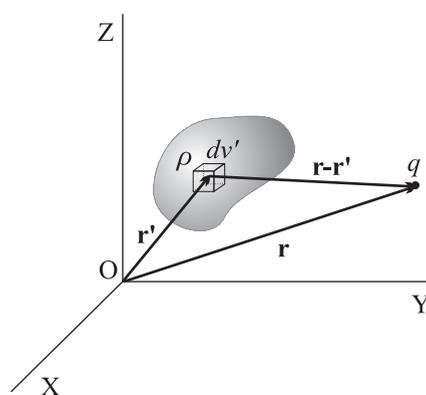


Figura 1.2

1.1.5 CAMPO ELÉCTRICO

Campo eléctrico es la región del espacio donde la fuerza electrostática actúa.

Intensidad de campo eléctrico \mathbf{E} , es el límite al que tiende la fuerza sobre una carga de prueba Δq , producida por una distribución de carga, cuando

Δq tiende a cero y con Δq positiva. Esta relación es independiente de la carga de prueba Δq , siendo un vector función del punto considerado, cuyo módulo, dirección y sentido es el de la fuerza por unidad de carga en dicho punto.

$$\mathbf{E} = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_{\Delta q}}{\Delta q} \quad [\text{N/C} = \text{V/m}] \quad (1.5)$$

1.1.6 PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN LINEAL

Este principio establece que, la fuerza electrostática (campo eléctrico resultante) sobre una carga (en un punto), es la suma vectorial de las componentes individuales sobre la carga (en el punto), debidas a cada carga puntual o densidad de carga sobre un volumen, superficie o longitud elemental.

1.1.7 SISTEMAS DE CARGAS PUNTUALES

Fuerza sobre una carga q situada en el punto \mathbf{r} debida a un sistema de cargas q_i en el vacío.

$$\mathbf{F}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (1.6)$$

Campo eléctrico en el punto \mathbf{r} .

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (1.7)$$

1.1.8 DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE CARGA

Fuerza sobre una carga q situada en un punto \mathbf{r} debida a una distribución continua de carga. El vector \mathbf{r}' indica el punto donde se sitúa el volumen elemental dv' de la distribución (véase la figura 1.2).

$$\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \quad (1.8)$$

Campo eléctrico en un punto \mathbf{r} .

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \quad (1.9)$$

De forma similar se obtienen fuerza y campo en el caso de distribuciones superficiales y lineales de carga, sin más que sustituir $\rho(\mathbf{r}')$ por $\sigma(\mathbf{r}')$ o $\lambda(\mathbf{r}')$,

dv' por ds' o dl' , y V por S o C , respectivamente. Las expresiones para el campo eléctrico en el caso de distribuciones superficiales y lineales son:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds' \quad (1.10)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dl' \quad (1.11)$$

1.2. PROBLEMAS

PROBLEMA 1.1

Disponemos tres cargas q_1 , q_2 , q_3 sobre una circunferencia de radio un metro como indica la figura P1.1; $q_1 = q_0$, $q_2 = q_3 = -q_0/2$.

- 1) Calcular el campo eléctrico creado en el centro de la circunferencia.
- 2) Calcular la fuerza ejercida sobre la carga q_1 .

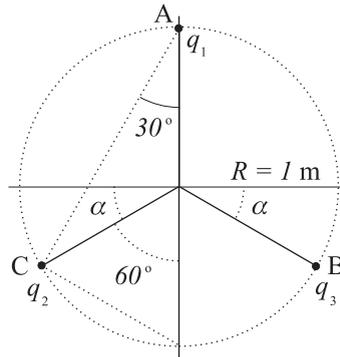


Figura P1.1

Solución

1) Calculamos el campo en el centro de la circunferencia, teniendo en cuenta el principio de superposición y su aplicación al caso de un sistema de cargas puntuales. Es decir, el campo será la suma vectorial de los campos creados por cada una de las cargas. Aplicando la ecuación (1.7), con:

$$\mathbf{r} = 0, \quad \mathbf{r}_1 = R \mathbf{u}_y ; \quad \mathbf{r}_2 = -R(\mathbf{u}_x \cos \alpha + \mathbf{u}_y \sin \alpha)$$

$$\mathbf{r}_3 = R(\mathbf{u}_x \cos \alpha - \mathbf{u}_y \sin \alpha) \text{ y } |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| = R \text{ con } i = 1, 2, 3$$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R^2} (-\mathbf{u}_y)$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{R^2} (\mathbf{u}_x \cos \alpha + \mathbf{u}_y \sin \alpha)$$

$$\mathbf{E}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3}{R^2} (-\mathbf{u}_x \cos \alpha + \mathbf{u}_y \sin \alpha)$$

Teniendo en cuenta los valores que en el problema se proponen para las cargas,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q_o}{R^2} (-1 - \text{sen } \alpha) \mathbf{u}_y$$

Como $\alpha = 30^\circ$, $\text{sen } \alpha = 1/2$ y $R = 1$, por tanto el campo \mathbf{E} en el centro es:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{3q_o}{2R^2} \mathbf{u}_y = -\frac{3q_o}{8\pi\epsilon_o} \mathbf{u}_y$$

2) Para calcular la fuerza sobre la carga q_1 , se obtiene primero el campo debido a las cargas q_2 y q_3 en el punto donde se sitúa la carga q_1 .

La distancia entre las cargas es:

$$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = d = (R^2 \cos^2 \alpha + R^2 (1 + \text{sen } \alpha)^2)^{1/2} = R\sqrt{3}$$

Los campos respectivos son:

$$\mathbf{E}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q_2}{d^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{R}{4\pi\epsilon_o} \frac{q_2}{d^3} (\mathbf{u}_y + \mathbf{u}_x \cos \alpha + \mathbf{u}_y \text{sen } \alpha)$$

$$\mathbf{E}_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q_3}{d^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) = \frac{R}{4\pi\epsilon_o} \frac{q_3}{d^3} (\mathbf{u}_y - \mathbf{u}_x \cos \alpha + \mathbf{u}_y \text{sen } \alpha)$$

El campo total, sustituyendo q_2 y q_3 por $-q_o/2$, será,

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}_{12} + \mathbf{E}_{13} = -\frac{R}{4\pi\epsilon_o} \frac{q_o}{2d^3} (2 + 2 \text{sen } \alpha) \mathbf{u}_y$$

Sustituyendo los valores de $\text{sen } \alpha = 1/2$ y $d = R\sqrt{3}$, queda,

$$\mathbf{E}' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q_o}{R^2} \frac{\sqrt{3}}{6} \mathbf{u}_y$$

La fuerza es:

$$\mathbf{F} = q_o \mathbf{E}' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q_o^2}{R^2} \frac{\sqrt{3}}{6} \mathbf{u}_y$$

PROBLEMA 1.2

Sobre el eje Y colocamos nueve cargas q como indica la figura P1.2.

1) Calcular el campo en los puntos $(1, 0, 0)$ y $(10, 0, 0)$.

2) Suponiendo que la carga $Q = 9q$ está distribuida uniformemente sobre el segmento de recta comprendido entre los puntos $(0, 4, 0)$ y $(0, -4, 0)$, calcular el campo en los puntos $(1, 0, 0)$ y $(10, 0, 0)$. Comparar los resultados obtenidos en 1) y 2).

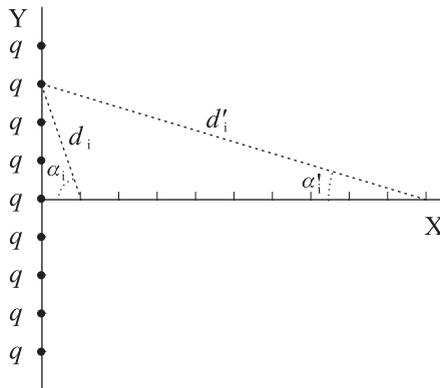


Figura P1.2

Solución

1) Campo debido a las cargas puntuales

Para calcular el campo en los puntos indicados, recurrimos a la ecuación (1.7).

1.1) Punto $(1, 0, 0)$

$$\mathbf{r} = \mathbf{u}_x ; \mathbf{r}_i = d_i \text{sen } \alpha_i \mathbf{u}_y \text{ para } y > 0 ; \mathbf{r}_i = -d_i \text{sen } \alpha_i \mathbf{u}_y \text{ para } y < 0$$

$$d_i \text{sen } \alpha_i = n , (n = 1 \dots 4) \rightarrow |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| = d_i = (1 + n^2)^{1/2}$$

Dada la simetría de la distribución, las componentes \mathbf{u}_y al sumar se anulan, ya que, salvo la situada en O, cada carga tiene otra situada de forma simétrica.

$$\mathbf{E}_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \left(\mathbf{u}_x + \sum_{n=1}^4 (\mathbf{u}_x - d_i \text{sen } \alpha_i \mathbf{u}_y) \frac{1}{d_i^3} + \sum_{n=1}^4 (\mathbf{u}_x + d_i \text{sen } \alpha_i \mathbf{u}_y) \frac{1}{d_i^3} \right)$$

Operando y sustituyendo d_i obtenemos:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^4 \frac{1}{(1 + n^2)^{3/2}} \right) \mathbf{u}_x \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_o} 1,98 \mathbf{u}_x$$

1.2) Punto (10, 0, 0)

Se procede en forma análoga al caso anterior, con la diferencia de que ahora $\mathbf{r} = 10\mathbf{u}_x$, y $d_i = (10^2 + n^2)^{1/2}$.

$$\mathbf{E}_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{1}{10^2} + 2 \sum_{n=1}^4 \frac{10}{(10^2 + n^2)^{3/2}} \right) \mathbf{u}_x \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_o} 8,21 \times 10^{-2} \mathbf{u}_x$$

2) Campo debido a la distribución lineal de carga

En el cálculo que vamos a realizar en este apartado, se supone que existe una distribución lineal de carga $\lambda = 9q/8$ (C/m). Los campos se calculan mediante la ecuación (1.11).

2.1) Punto (1, 0, 0)

$$\mathbf{r} = \mathbf{u}_x ; \quad \mathbf{r}' = y\mathbf{u}_y ; \quad dl' = dy ; \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = d = (1 + y^2)^{1/2}$$

$$\mathbf{E}'_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{9q}{8} \int_{-4}^4 \frac{(\mathbf{u}_x - y\mathbf{u}_y)dy}{(1 + y^2)^{3/2}}$$

Integrando por componentes, quedan de la forma siguiente:

$$\int_{-4}^4 \frac{dy}{(1 + y^2)^{3/2}} = \left[\frac{y}{(1 + y^2)^{1/2}} \right]_{-4}^4 = \frac{8}{17^{1/2}} \quad \text{para } \mathbf{u}_x$$

$$\int_{-4}^4 \frac{-y dy}{(1 + y^2)^{3/2}} = \left[\frac{1}{(1 + y^2)^{1/2}} \right]_{-4}^4 = 0 \quad \text{para } \mathbf{u}_y$$

Llevando los cálculos anteriores a \mathbf{E}'_1 , obtenemos:

$$\mathbf{E}'_1 \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_o} 2,18 \mathbf{u}_x$$

2.2) Punto (10, 0, 0)

Procedemos de manera similar al caso anterior, poniendo ahora:

$\mathbf{r} = 10\mathbf{u}_x$ y $d = (10^2 + y^2)^{1/2}$. La integral que no se anula en este caso es:

$$\int_{-4}^4 \frac{10dy}{(10^2 + y^2)^{3/2}} = \left[\frac{y}{10(10^2 + y^2)^{1/2}} \right]_{-4}^4 = \frac{8}{10\sqrt{116}}$$

El campo \mathbf{E} queda de la forma,

$$\mathbf{E}'_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \frac{9}{8} \frac{8}{10\sqrt{116}} \mathbf{u}_x \simeq 8,35 \times 10^{-2} \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \mathbf{u}_x$$

Comparando los resultados obtenidos en 1) y 2), se observa que el campo eléctrico disminuye más rápidamente con la distancia en la distribución continua que en la discreta. Además la diferencia entre ambos cálculos disminuye con la distancia.

PROBLEMA 1.3

Sobre la semicircunferencia indicada en la figura P1.3 se distribuye una densidad de carga lineal $\lambda = \lambda_o \cos \varphi$.

- 1) Calcular la carga total distribuida sobre la semicircunferencia.
- 2) Calcular el campo en el punto O.
- 3) ¿En qué punto del eje X debe situarse la carga calculada en 1) para que el campo en O sea el mismo que el obtenido en el apartado 2)?

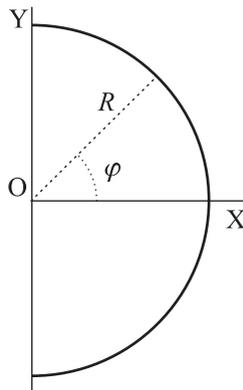


Figura P1.3

Solución

1) Carga

El cálculo de la carga total se hace sumando las cargas elementales sobre cada segmento diferencial de la circunferencia, es decir, se suman $\lambda dl'$ desde $-\pi/2$ a $\pi/2$.

$$dl' = R d\varphi ; \lambda dl' = \lambda_o \cos \varphi R d\varphi$$

Por tanto

$$Q = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R\lambda_o \cos \varphi \, d\varphi = 2R\lambda_o$$

2) *Campo*

Aplicaremos la ecuación (1.11) para calcular el campo en el punto O. Dada la simetría de la distribución con respecto al eje X, la componente E_y del campo será nula.

Los vectores de posición \mathbf{r} y \mathbf{r}' son respectivamente:

$$\mathbf{r} = 0 \ ; \ \mathbf{r}' = R \cos \varphi \mathbf{u}_x + R \operatorname{sen} \varphi \mathbf{u}_y \ ; \ |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = R$$

Los límites de integración son los indicados en el apartado 1).

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{R\lambda_o \cos \varphi \, d\varphi (-R \cos \varphi \mathbf{u}_x - R \operatorname{sen} \varphi \mathbf{u}_y)}{R^3}$$

La integración de la parte correspondiente a la componente y es de la forma $\int \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \, d\varphi = (1/2)\operatorname{sen}^2 \varphi$, que entre los límites indicados es nula, por tanto sólo queda la componente x .

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{-\lambda_o \cos^2 \varphi \, d\varphi}{R} \mathbf{u}_x = -\frac{\lambda_o}{4\pi\epsilon_o R} \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathbf{u}_x$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\lambda_o}{8\epsilon_o R} \mathbf{u}_x$$

3) *Punto sobre el eje X*

Para calcular la distancia a que debemos colocar una carga $Q = 2\lambda_o R$, que produzca el mismo campo en O, se igualará el campo que crea Q en el punto de coordenada x con el obtenido en el apartado anterior.

$$\frac{\lambda_o}{8\epsilon_o R} = \frac{2\lambda_o R}{4\pi\epsilon_o x^2}$$

por tanto deducimos que

$$x = \pm \left(\frac{4}{\pi}\right)^{1/2} R$$

Dado que el campo tiene la dirección \mathbf{u}_x ($x > 0$) y por ello,

$$x = 2 R \pi^{-1/2}$$

es la coordenada del punto donde debemos situar la carga Q .

PROBLEMA 1.4

Sobre una capa semiesférica de radio R , tenemos una distribución superficial de carga uniforme $\sigma = 1 \text{ C/m}^2$.

Calcular el campo eléctrico en el centro O de la figura P1.4.

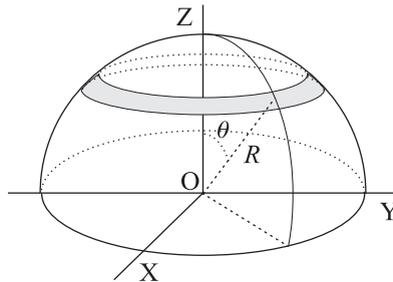


Figura P1.4

Solución

Se trata de una distribución superficial de simetría cilíndrica, por tanto aplicaremos la ecuación (1.10) para calcular el campo en el centro O . Teniendo en cuenta la citada simetría al sumar las contribuciones de $\sigma ds'$ sobre la semiesfera sólo quedan las componentes en la dirección del eje Z . Las componentes perpendiculares se anulan pues cada $\sigma ds'$ tiene otro elemento simétrico que produce una componente perpendicular al eje Z del mismo módulo pero de signo contrario.

$$\mathbf{r} = 0 ; \mathbf{r}' = R\mathbf{u}_r ; |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = R ; ds' = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

Cada componente sobre el eje Z es proporcional a,

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{u}_z = -R\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_z = -R \cos \theta$$

Teniendo en cuenta la ecuación (1.10) y las relaciones anteriores,

$$E_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma R^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{R^3} R \cos \theta = -\frac{2\pi\sigma}{4\pi\epsilon_o} \left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^{\pi/2}$$

El vector campo tiene sentido hacia $z < 0$ por tanto,

$$\mathbf{E} = -\frac{\sigma}{4\epsilon_o} \mathbf{u}_z$$

PROBLEMA 1.5

Sobre una superficie esférica como la indicada en la figura P1.5, se distribuye una densidad de carga superficial $\sigma = \sigma_o \cos \theta$.

Calcular el campo eléctrico en el centro O.

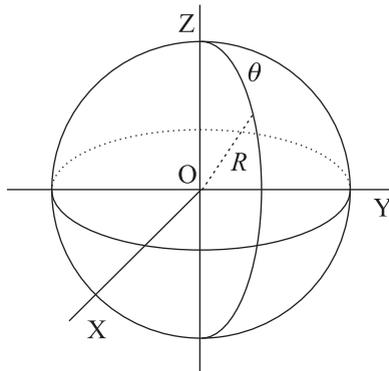


Figura P1.5

Solución

La distribución de carga tiene simetría cilíndrica con eje Z. La zona con $z > 0$, parte superior de la esfera, tiene una densidad de carga positiva, y en la inferior, $z < 0$, la densidad de carga es negativa .

Dada la simetría de la distribución, al sumar sólo quedan componentes en la dirección del eje Z, ya que las perpendiculares a dicho eje se anulan. Cada carga elemental $\sigma ds'$ tiene otra simétrica cuya componente perpendicular al eje Z es del mismo módulo y signo opuesto.

$$\mathbf{r} = 0 ; \mathbf{r}' = R\mathbf{u}_r ; |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = R ; ds' = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

Cada $\sigma ds'$ tiene una componente en la dirección del eje Z proporcional a $(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{u}_z$.

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{u}_z = -R\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_z = -R \cos \theta$$

El campo debido a la semiesfera superior ($z > 0$), tiene la dirección y sentido de $-\mathbf{u}_z$. El correspondiente a la semiesfera inferior, dado que su signo es negativo, tiene el mismo módulo dirección y sentido que el anterior. Por tanto, calculamos el campo correspondiente a la semiesfera superior, y multiplicando por dos se obtiene el resultado correcto del problema.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores y la ecuación (1.10), podemos calcular E_z de la forma siguiente:

$$E_z = \frac{-2}{4\pi\epsilon_o} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{R^2 \sigma_o \cos \theta \operatorname{sen} \theta d\theta d\varphi}{R^3} R \cos \theta = \frac{\sigma_o}{\epsilon_o} \left[\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^{\pi/2}$$

Realizando operaciones obtenemos,

$$E_z = -\frac{\sigma_o}{3\epsilon_o} \rightarrow \mathbf{E} = -\frac{\sigma_o}{3\epsilon_o} \mathbf{u}_z$$

PROBLEMA 1.6

Sobre un plano indefinido tenemos dos distribuciones de carga. Una densidad superficial de carga uniforme $-\sigma$ sobre un círculo de radio R y otra de signo contrario σ sobre el resto del plano, véase la figura P1.6.a.

Aplicando el principio de superposición, calcular el campo eléctrico sobre el eje Z.

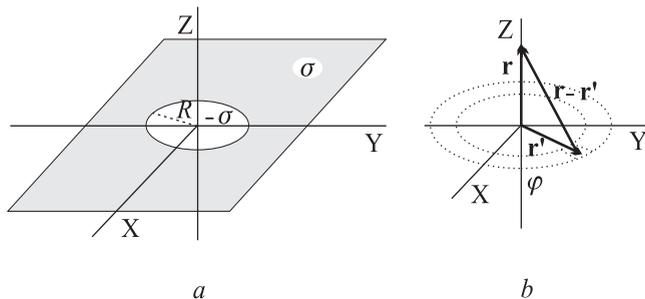


Figura P1.6

Solución

Las distribuciones de carga propuestas son equivalentes a las siguientes: una distribución uniforme σ sobre todo el plano, incluido el círculo de radio R , y una distribución -2σ sobre el círculo de radio R . El cálculo del campo eléctrico, aplicando el principio de superposición a la distribución indicada anteriormente, es el que obtendríamos con la distribución propuesta en el problema.

Los cálculos correspondientes a cada distribución los haremos utilizando la ecuación (1.10).

1) Campo debido al círculo de radio R y densidad -2σ

La distribución tiene simetría cilíndrica con eje el Z. El campo eléctrico en cualquier punto del eje Z, dada la simetría de la distribución, sólo

tiene componente en la dirección de dicho eje, ya que cada elemento $-2\sigma ds'$ tiene un simétrico que produce una componente perpendicular al eje Z de signo contrario, véase la figura P1.6.b, por lo que al integrar se anulan las componentes perpendiculares al eje Z.

Como se indica en la figura P1.6.b,

$$\mathbf{r} = z\mathbf{u}_z ; ds' = r' d\varphi dr' ; \mathbf{r}' = r' \cos \varphi \mathbf{u}_x + r' \sin \varphi \mathbf{u}_y$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (z^2 + r'^2)^{1/2}$$

Las componentes en la dirección del eje Z son proporcionales a,

$$\mathbf{u}_z \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = z$$

Aplicando la ecuación (1.10) y teniendo en cuenta las condiciones particulares del problema expresadas anteriormente,

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{-2\sigma z r' d\varphi dr'}{(z^2 + r'^2)^{3/2}} = -\frac{\sigma}{\epsilon_o} \left[-\frac{z}{(z^2 + r'^2)^{1/2}} \right]_0^R$$

$$E_z = -\frac{\sigma}{\epsilon_o} \left(1 - \frac{|z|}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right)$$

El significado de $|z|$ es el siguiente: El campo tiene el mismo módulo, tanto para $z > 0$ como para $z < 0$, pero el sentido es opuesto, el sentido de $-\mathbf{u}_z$ para $z > 0$ y \mathbf{u}_z para $z < 0$.

2) *Campo debido al plano con la distribución σ*

El planteamiento es similar al caso anterior, lo que varía es la densidad superficial de carga y los límites de integración para r' .

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\sigma z r' d\varphi dr'}{(z^2 + r'^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_o} \left[-\frac{z}{(z^2 + r'^2)^{1/2}} \right]_0^\infty$$

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_o}$$

El campo eléctrico en este caso tiene el sentido de \mathbf{u}_z en la zona de $z > 0$, y el de $-\mathbf{u}_z$ para $z < 0$.

El campo eléctrico total será:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \mathbf{u}_z - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \left(1 - \frac{|z|}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right) \mathbf{u}_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\frac{2|z|}{(z^2 + R^2)^{1/2}} - 1 \right) \mathbf{u}_z$$

El campo eléctrico para $z < 0$ tiene el mismo módulo pero sentido opuesto al anterior.

PROBLEMA 1.7

En una capa esférica se suprime un casquete esférico de 30° , como indica la figura P1.7. Sobre la capa, una vez separado el casquete, se distribuye uniformemente una densidad superficial de carga σ .

Aplicando el principio de superposición calcular el campo eléctrico en el centro de la esfera O.

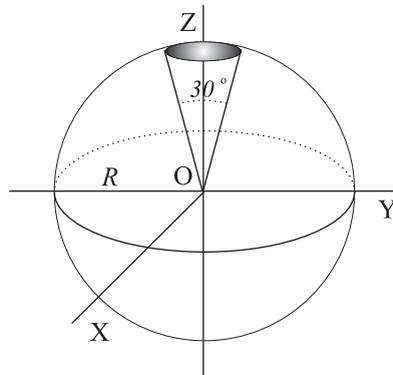


Figura P1.7

Solución

El problema propuesto es equivalente a dos distribuciones superficiales: Una capa esférica completa con densidad uniforme σ y un casquete, de las mismas dimensiones que el propuesto, con una densidad $-\sigma$.

La aplicación del principio de superposición lleva al cálculo del campo mediante la suma de los campos creados por la capa con densidad σ y el casquete con densidad $-\sigma$.

El campo creado por la capa esférica con densidad σ en su centro es nulo, dada la simetría esférica de la distribución.

La contribución del casquete se obtiene mediante la ecuación (1.10), y la aplicación de las condiciones de simetría cilíndrica, con eje Z, que tiene dicha distribución. La simetría tiene como consecuencia que sólo existe componente del campo en la dirección del eje Z, ya que cada elemento $-\sigma ds'$

tiene un simétrico, que produce una componente perpendicular al eje Z del mismo módulo pero de signo opuesto, con lo que al integrar se anula la componente perpendicular al eje Z.

Los distintos elementos de la ecuación (1.10) en este caso son:

$$\mathbf{r} = 0; \quad \mathbf{r}' = R\mathbf{u}_r \quad ; \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = R \quad ; \quad ds' = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

La componente en la dirección del eje Z es proporcional a:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{u}_z = -R\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_z = -R \cos \theta$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/12} \frac{\sigma R^3 \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi}{R^3} = \frac{\sigma}{2\epsilon_o} \left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^{\pi/12}$$

El campo \mathbf{E} en O será:

$$E_z \simeq 1,67 \times 10^{-2} \frac{\sigma}{\epsilon_o} \quad \rightarrow \quad \mathbf{E} \simeq 1,67 \times 10^{-2} \frac{\sigma}{\epsilon_o} \mathbf{u}_z$$

PROBLEMA 1.8

Una esfera de material dieléctrico, se taladra diametralmente, dejando un hueco cilíndrico de radio $b = 10^{-2}a$. El hueco se puede considerar filiforme en comparación con el radio a de la esfera. Véase la figura P1.8.

Sobre la esfera, salvo en el hueco cilíndrico, se distribuye un densidad de carga uniforme ρ .

Aplicando el principio de superposición calcular el campo eléctrico \mathbf{E} en el punto P.

Solución

La distribución indicada en el problema es equivalente a las dos distribuciones siguientes: Una esfera con una distribución uniforme ρ y un hilo de radio b y altura $2a$ con una densidad lineal λ tal que $\lambda 2a = (-\rho)\pi b^2 2a$, es decir, $\lambda = -\pi b^2 \rho$.

1) *Campo creado por la esfera*

Dicho campo es el mismo que si consideramos toda la carga sobre la esfera situada en su centro. Con los datos de la figura $OP^2 = 4a^2 - a^2$, es decir, $OP = \sqrt{3}a$, por tanto,

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{3a^2} \int_V \rho dv' \mathbf{u}_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{3a^2} \frac{4}{3} \pi a^3 \rho \mathbf{u}_y$$

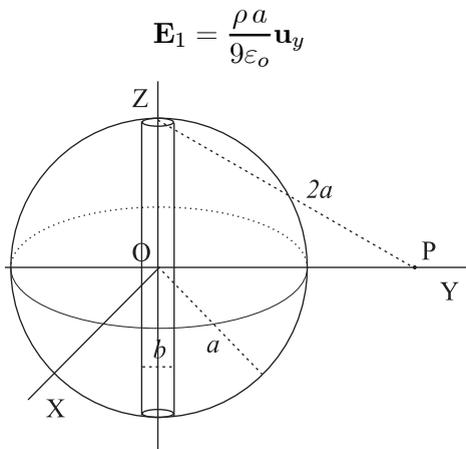


Figura P1.8

2) *Campo creado por el hilo*

Para dicho cálculo utilizamos la ecuación (1.11) y las siguientes condiciones particulares del problema:

$$\mathbf{r} = r \mathbf{u}_y ; \mathbf{r}' = z \mathbf{u}_z ; dl' = dz ; |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (r^2 + z^2)^{1/2}$$

Los límites de integración son $-a$ y a ; $r = \sqrt{3} a$.

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{-a}^a \frac{\lambda dz (r \mathbf{u}_y - z \mathbf{u}_z)}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

La integración de cada componente, produce lo siguiente:

Componente \mathbf{u}_z

$$E_{2z} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} \left[\frac{1}{r^2(r^2 + z^2)^{1/2}} \right]_{-a}^a = 0$$

Componente \mathbf{u}_y

$$E_{2y} = \frac{\lambda r}{4\pi\epsilon_o} \left[\frac{z}{r^2(r^2 + z^2)^{1/2}} \right]_{-a}^a = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} \frac{2a}{r(r^2 + a^2)^{1/2}}$$

Sustituyendo los valores de $\lambda = -\pi a^2 \times 10^{-4} \rho$ y $r = \sqrt{3} a$,

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{\rho a 10^{-4} \sqrt{3}}{12\epsilon_o} \mathbf{u}_y$$

Sumando los valores obtenidos en 1) y 2) calculamos \mathbf{E} ,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{\rho a}{\epsilon_o} \left(\frac{1}{9} - \frac{10^{-4}\sqrt{3}}{12} \right) \mathbf{u}_y \simeq 0,111 \frac{\rho a}{\epsilon_o} \mathbf{u}_y$$

PROBLEMA 1.9

Disponemos de una esfera dieléctrica de radio R . Sobre un meridiano se ha realizado un canal de sección circular; el radio de dicha sección es d ($d \ll R$). Véase la figura P1.9. Sobre la esfera, excluido el canal, existe una distribución uniforme de carga ρ_o .

Aplicando el principio de superposición, calcular el campo eléctrico en el punto P debido a la distribución de carga descrita.

Suponemos el radio medio del canal igual a R .

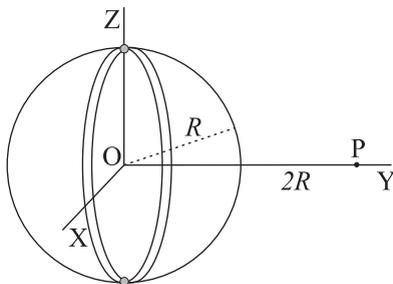


Figura P1.9

Solución

Aplicando el principio de superposición, el sistema indicado es equivalente a una esfera uniformemente cargada con densidad ρ_o , más un anillo cuya sección es de radio d y densidad de carga $-\rho_o$. El anillo ocupa la posición dónde se ha abierto el canal en la esfera. Calculamos por separado los dos campos.

1) *Esfera*

Puesto que el punto P está situado fuera de la esfera. Aplicamos el campo creado por la carga de la esfera situada en O,

$$\mathbf{E}_1(y) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o y^2}$$

$$\mathbf{E}_1(P) = \frac{(4/3)\pi R^3 \rho_o}{4\pi\epsilon_o (2R)^2} \mathbf{u}_y = \frac{\rho_o R}{12\epsilon_o} \mathbf{u}_y$$

2) *Anillo*

Calculamos el campo integrando la distribución de carga que representa el anillo. Usaremos coordenadas cilíndricas, pero con el eje Y como eje del anillo. Aplicamos la siguiente ecuación para el campo,

$$\mathbf{E}_2(y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Donde, en nuestro caso, y para el punto P, suponiendo que $r' \simeq R$ ya que $d \ll R$.

$$\rho(\mathbf{r}') = -\rho_o ; \mathbf{r} = 2R \mathbf{u}_y ; \mathbf{r}' \simeq R \mathbf{u}_\rho$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (4R^2 + R^2)^{1/2} = R\sqrt{5} \text{ y } dv' = \pi d^2 R d\varphi$$

La integral se extiende al volumen del anillo, y la única variable es φ , cuyos límites son 0 y 2π . Rescribimos la integral,

$$\mathbf{E}_2(\text{P}) = \frac{-\rho_o \pi d^2}{4\pi\epsilon_o} \int_0^{2\pi} \frac{R d\varphi (2R \mathbf{u}_y - R \mathbf{u}_\rho)}{(R\sqrt{5})^3} = \frac{-\rho_o d^2 \sqrt{5}}{4\epsilon_o} \int_0^{2\pi} \frac{(2\mathbf{u}_y - \mathbf{u}_\rho)d\varphi}{25R}$$

Resolvemos la integral para cada componente de los vectores \mathbf{u}_ρ y \mathbf{u}_y , que son:

$$\int_0^{2\pi} R \mathbf{u}_\rho d\varphi = 0$$

El resultado es nulo por que se trata de la suma de vectores radiales que varían para cada ángulo de la circunferencia, de manera que $\mathbf{u}_\rho(\varphi) = -\mathbf{u}_\rho(\varphi + \pi)$.

$$\int_0^{2\pi} 2\mathbf{u}_y d\varphi = 2\pi 2\mathbf{u}_y = 4\pi \mathbf{u}_y$$

Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\mathbf{E}_2(\text{P}) = \frac{-\rho_o \pi d^2 \sqrt{5}}{\epsilon_o 25 R} \mathbf{u}_y$$

Ahora ya podemos escribir el campo total como $\mathbf{E}(\text{P}) = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$

$$\mathbf{E}(\text{P}) = \frac{\rho_o R}{12\epsilon_o} \mathbf{u}_y - \frac{\rho_o \pi d^2 \sqrt{5}}{\epsilon_o 25 R} \mathbf{u}_y = \frac{\rho_o}{\epsilon_o} \left(\frac{R}{12} - \frac{\pi d^2 \sqrt{5}}{25 R} \right) \mathbf{u}_y$$

PROBLEMA 1.10

Sobre un sector truncado de una esfera de ángulo 60° , como el indicado en la figura P1.10, existe una distribución de carga uniforme ρ .

Calcular el campo eléctrico en el punto O debido a la distribución de cargas.

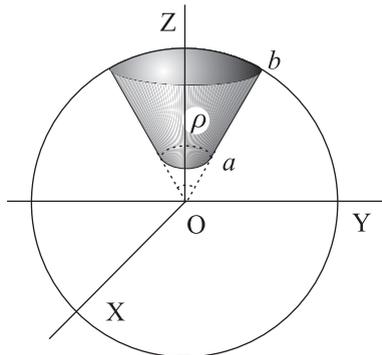


Figura P1.10

Solución

El campo eléctrico en el punto O debido a la distribución de carga dada se calcula mediante la expresión

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho dv'(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

En este caso $\mathbf{r} = 0$ y $\mathbf{r}' = r'\mathbf{u}_r$. $dv' = r'^2 \sin\theta dr' d\theta d\varphi$. Sustituyendo en la ecuación anterior,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{-\rho r'\mathbf{u}_r r'^2 \sin\theta dr' d\theta d\varphi}{r'^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho \mathbf{u}_r \sin\theta dr' d\theta d\varphi$$

Dada la simetría de la distribución al sumar las componentes sólo nos queda la que corresponde al eje Z. O de otra manera, como \mathbf{u}_r en coordenadas cilíndricas es $\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_z \cos\theta + \mathbf{u}_\rho \sin\theta$; al considerar todas las variaciones del ángulo φ , \mathbf{u}_ρ tiene signo opuesto en $\varphi + \pi$ con respecto al valor en φ , por tanto al integrar dicha componente se anula, en consecuencia,

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho \mathbf{u}_z \cos\theta \sin\theta dr' d\theta d\varphi$$

Los intervalos de variación para θ y φ son: φ varía entre 0 y 2π , θ entre 0 y $\pi/6$, y r' entre a y b .

$$\mathbf{E} = -\frac{\rho \mathbf{u}_z}{4\pi \varepsilon_o} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/6} \cos \theta \operatorname{sen} \theta \, d\theta \int_a^b dr'$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\rho \mathbf{u}_z}{4\pi \varepsilon_o} [\varphi]_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \theta \right]_0^{\pi/6} [r']_a^b = -\frac{\rho \mathbf{u}_z}{4\varepsilon_o} (b-a) \operatorname{sen}^2(\pi/6)$$

La solución final para el campo es,

$$\mathbf{E} = -\frac{\rho(b-a)}{16\varepsilon_o} \mathbf{u}_z$$