1. PROBLEMAS DE DECISIÓN

En su dimensión más básica los problemas de decisión consisten en: la elección de **"lo mejor"** entre **"lo posible"**.

Estos problemas planteados en el contexto general de la programación matemática obedecen, en general, a la estructura siguiente:

Optimizar (maximizar o minimizar) una función (: = **función objetivo**) en el conjunto de soluciones de un número finito de ecuaciones e inecuaciones débiles (: = **restricciones del problema**).

Con este planteamiento **"lo posible"** se determina por las restricciones del problema (información exclusivamente técnica que modeliza la existencia de recursos limitados, entendiendo el término recurso en un sentido amplio) y **"lo mejor"** por las preferencias que señala el decisor al optimizar la función objetivo.

La función objetivo, que puede ser una función escalar (**problema monoobjetivo**) o vectorial[1] (**problema multiobjetivo**) y las restricciones son funciones de las variables de decisión y de parámetros.

Las variables de decisión son aspectos del problema controlables por del decisor y los parámetros son cantidades dadas que no se pueden controlar. Se supone siempre que las variables de decisión son no negativas. Matemáticamente, las vamos a representar por el vector $\mathbf{x}$ y la función objetivo por $f(\mathbf{x})$ o $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, según que el problema considerado sea monoobjetivo o mutiobjetivo, respectivamente.

Cualquier colección de valores que se asigne a las variables de decisión, representa una solución del problema. Una solución que satisface todas las restricciones recibe el nombre de solución factible y el conjunto de todas ellas, define el conjunto F (: = **conjunto factible o conjunto elección**).

El conjunto F, supuesto no vacío[2], puede incluir un número finito o infinito de soluciones. Según que este número sea infinito o finito los problemas de decisión se clasifican en problemas **continuos** o **discretos**, respectivamente.

Acerca de las restricciones

Las restricciones vienen dadas por ecuaciones (signo =) e inecuaciones débiles (signos $\leq$ o $\geq$), formuladas en términos de las variables de decisión del problema. No obstante a esto, pueden escribirse siempre como inecuaciones débiles expresadas todas ellas con el mismo signo, debido a lo siguiente:

$$r_i(\mathbf{x}) \geq b_i \quad \Leftrightarrow \quad -r_i(\mathbf{x}) \leq -b_i$$

---

[1] Sus componentes son funciones escalares que identifican los distintos objetivos del problema.

[2] Si el conjunto factible F es vacío, significa que no existe ninguna solución que satisfaga simultáneamente todas las restricciones y el problema se dice infactible.

$$\mathrm{r_i}(\mathbf{x}) = \mathrm{b_i} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{r_i}(\mathbf{x}) \geq \mathrm{b_i} \\ \mathrm{r_i}(\mathbf{x}) \leq \mathrm{b_i} \end{cases}$$

También, caso de tener restricciones de igualdad, es posible reducir el número de variables del problema. Para ello, si alguna restricción viene dada por una ecuación (signo =) se despeja en ella una de sus variables en función de las restantes, se elimina la restricción y el valor de esta variable se sustituye en las demás restricciones y en la función objetivo.

Es interesante señalar que, en muchos contextos decisionales, un cierto relajamiento en el cumplimiento de las restricciones no afecta seriamente al marco real de definición del problema y sin embargo puede permitir mejoras significativas en los resultados conseguidos.

Sujetos del proceso de decisión

Decisor o centro decisor: individuo o grupo de individuos, interesados en el problema a resolver, que directamente o indirectamente proporciona/n su solución.

Analista: individuos o grupos de individuos que analizan el problema a resolver y ayudan al decisor o centro decisor a elegir una solución conveniente del mismo.

1.1. Formulación general de un problema de decisión

Determinadas las variables de decisión y construidas las expresiones matemáticas que definen las restricciones y los objetivos, la formulación general de un problema de decisión "**continuo o discreto**" con m objetivos, n variables de decisión y k restricciones es[3]:

$$\text{Optimizar} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) : (\mathrm{f_1}(\mathbf{x}), \mathrm{f_2}(\mathbf{x}), \ldots\ldots, \mathrm{f_m}(\mathbf{x}))^{\mathrm{T}}$$

s.a. :

$$\mathbf{x} \in \mathrm{F} := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^{\mathrm{n}} / \mathrm{r_i}(\mathbf{x}) \leq \mathrm{b_i},\ \mathrm{b_i} \in \mathbf{R},\ \mathrm{i} = 1,2,\ldots.,\mathrm{k},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \right\}$$

Es interesante señalar que, aunque es posible formular los problemas de decisión multiobjetivo discretos utilizando la formulación correspondiente a problemas continuos, **¡no es lo usual ni lo recomendable!**

Tratando con problemas discretos, por verificarse que las alternativas factibles se conocen explícitamente y que su número es finito, generalmente no muy elevado,

[3] La optimización de una función objetivo vectorial, puede plantearse siempre en un sentido maximizador/minimizador sin más que signar convenientemente sus componentes, teniendo en cuenta que: Max f ($\mathbf{x}$) es equivalente a Min [– f ($\mathbf{x}$)].

es preferible presentar “directamente” estas alternativas al decisor para que las evalúe utilizando como referencia los objetivos del problema.

La información obtenida de estas evaluaciones se recoge haciendo uso de matrices (matriz de Decisión/matrices de Comparación por Pares), las cuales se utilizan para formular y resolver estos problemas.

1.2. Problemas de decisión monoobjetivo y multiobjetivo

Los problemas monoobjetivo no deben ser considerados problemas de decisión propiamente dichos, sino **problemas de medición y búsqueda**.

Esto es debido a que en los mismos, el decisor utilizando diversas técnicas matemáticas, se limita a buscar dentro del conjunto de soluciones posibles (: = conjunto factible o conjunto elección) una solución (: = solución óptima) que asigne el mejor valor (máximo o mínimo según el caso) al único objetivo del problema.

Los problemas reales de decisión, surgen en problemas multiobjetivo con objetivos en **“conflicto”**.

Esto es debido a que en los mismos, no será posible obtener una solución factible que asigne a todos los objetivos del problema su mejor valor, sino que el decisor aplicando distintas metodologías, deberá decidir la “mejor solución” a escoger dentro conjunto factible.

El motivo de esto radica en lo siguiente:

En problemas monoobjetivo es posible definir en el conjunto factible la relación binaria de orden total[4], siguiente:

“alternativa A1 mejor o igual que alternativa A2”

que permite comparar **todas** las alternativas factibles según el valor que asignan a la función objetivo y obtener una solución óptima del problema; mientras que, en problemas multiobjetivo, con objetivos en conflicto, solo es posible definir una relación binaria de orden parcial estricto[5] (: = **Orden Pareto**) que no permite comparar **todas** las alternativas factibles y obtener una solución en la que todos los objetivos alcancen su mejor valor[6], sino tan solo segregar del conjunto factible un subconjunto propio (: = **Conjunto Eficiente**).

---

[4] Verifica las propiedades: Reflexiva, Antisimétrica, Transitiva y Conexa o Total.

[5] Verifica las propiedades: Irreflexiva y Transitiva.

[6] La comparación de soluciones en base a un objetivo, puede contradecir, la comparación basada en otros objetivos y por ello, en general, no será una solución factible del problema la que asigne “simultáneamente” el mejor valor a todos los objetivos.

Conjunto eficiente

Una alternativa factible es eficiente (Pareto óptima o no dominada), si no existe otra alternativa factible que proporcione una mejora en un objetivo sin producir un empeoramiento en "al menos" otro de los objetivos.

El conjunto de todas las alternativas eficientes, recibe el nombre de conjunto eficiente y para obtener este conjunto, se utiliza una información estrictamente técnica sin incorporar al análisis ninguna información sobre preferencias del decisor.

Crítica al paradigma de decisión monoobjetivo

Ventajas: tiene una gran solidez desde el punto de vista lógico, debido a que "permite ordenar (con una relación de orden total) todas las alternativas factibles del conjunto F según el valor que asignan a la función objetivo del problema".

Inconvenientes: los procesos reales de decisión se plantean usualmente no en base a un único objetivo sino a varios, generalmente en conflicto.

2. DECISIÓN MULTICRITERIO (MCDM)

La teoría que estudia y analiza los problemas de decisión que involucran diferentes objetivos y alternativas, se identifica como MCDM (*Multiple Criteria Decisión Making*) y constituye el área de desarrollo más activa de los últimos años en el campo de las ciencias de la decisión.

La MCDM ha sido desarrollada por investigadores de distintas áreas (principalmente de la Investigación Operativa) tras constituirse, a mediados de la década de los 70, el grupo de expertos **Special Interest Group on Múltiple Criteria Decisión Making** conocido, hoy en día, como **IS-MCDM: International Society on Multicriteria Decisión Making.**

2.1. Conceptos de interés en la MCDM

- *Atributos*: características de las alternativas de elección evaluables independientemente de los deseos del decisor, siendo usualmente susceptibles de expresarse como una función matemática de las variables de decisión. Su número es siempre finito.
- *Objetivos*: direcciones de mejora de los atributos. La mejora puede interpretarse en un sentido "más mejor" o "menos mejor". El primer caso corresponde a un proceso de maximización y el segundo a uno de minimización.
- *Nivel de aspiración*: nivel aceptable de logro que el decisor desea alcanzar para un atributo.
- *Meta*: combinación de un atributo con su nivel de aspiración.